

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА.

Муминов Ф.М., Душатов Н.Т., Миратоев З.М., Сулхонов Д.А.

Алмалыкский филиал Ташкентского государственного

технического университета

mfarhod007@gmail.com,

n_dushatov@rambler.ru,

АННОТАЦИЯ

Исследования краевые задачи для уравнения составного типа сравнительно новое направление в теории краевых задач. Особый интерес эти задачи представляют в связи с их приложением в различных задачам механики и физики, такие они возникают при моделировании тепло масс обмена в капиллярно-пористых средах ряда различных биологических объектов и других задач. Настоящая работа посвящена исследования краевые задачи для уравнения третьего порядка смешанного составного типа.

Ключевые слова: Краевые задача, уравнения смешанно-составной тип, локаль, сингулярное интегральное уравнение.

ABSTRACT

Investigations of boundary value problems for an equation of composite type are a relatively new direction in the theory of boundary value problems. These problems are of particular interest in connection with their application in various problems of mechanics and physics, such they arise when modeling heat and mass transfer in capillary-porous media of a number of different biological objects and other problems. The present work is devoted to the study of boundary value problems for a third-order equation of a displaced composite type.

Keywords: Boundary value problem, equations of mixed-composite type, locale, singular integral equation.

ВВЕДЕНИЕ

В односвязной области D , ограниченной гладкой линией σ , опирающейся на точки $A(0;1)$ и $B(1;0)$ расположенной в четверти плоскости ($x > 0, y < 0$) и отрезками AA_1, BE, A_1E прямых $x=0, x=1, y=1$ соответственно, где O, E – точки с координатами $(0,0), (1,1)$ рассматриваются уравнения [1-10]

$$\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } Lu = u_{xx} + \frac{1 - \operatorname{sgn} y}{2} u_{yy} - \frac{1 + \operatorname{sgn} y}{2} u_y.$$

ОБСУЖДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Задача 1. Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1. Функция $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D ($y \neq 0$).
2. Функция $u(x, y)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой области (допускается, что в точках $O(0, 0)$, $B(1, 0)$ частные производные u_x, u_y могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы).
3. Функция $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям.

$$\begin{aligned} u|_{\sigma} = f(\xi), u|_{BE} = \psi_1(y), u(0, y) + u(0, -y)|_{AA_1} = \psi(y), \\ u_x|_{AA_1} = \nu(y), \frac{\partial u}{\partial n}|_{\sigma} = f_1(\xi), \end{aligned} \quad (2)$$

где $f, f_1, \psi, \psi_1, \nu$ – заданные функции, удовлетворяющие определенным условиям гладкости и условиям согласования, причем $\psi(y)$ – четная функция.

Задача 2. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами задачи 1 кроме краевого условия $u|_{BE} = \varphi_1(y)$, которое заменяется условием $u|_{x=1} = u|_{BE}$ ($0 < e < 1$).

При исследовании этих задач будем пользоваться тем фактором, что любое регулярное решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(x, y) = z(x, y) + \mu(y), \quad (3)$$

соответственно [1-3], где $z(x, y)$ – регулярное решение уравнения

$$u_{xx} + \frac{1 + \operatorname{sgn} y}{2} u_{yy} - \frac{1 + \operatorname{sgn} y}{2} u_y = 0. \quad (4)$$

Обозначим $\mu(y) = \begin{cases} \mu_1(y), & 0 \leq y \leq 1, \\ \mu_2(y), & -1 \leq y \leq 0, \end{cases}$ $\mu_2(x, y)$ – произвольные дважды

непрерывно-дифференцируемые функция, $\mu_1(y)$ – произвольная непрерывно-дифференцируемая функция.

Без ограничения общности можно предполагать $\omega(0) = \omega'(0) = 0$.
Предполагается, что σ целиком лежит в полосе, ограниченной прямыми $x = 0, x = 1$.

Без ограничения общности можно предполагать, что $\mu(0) = \mu'(0) = 0$.

На основе (3) и (2) задача 2 редуцируется к определению регулярного решения (4) в области $D (y \neq 0)$ удовлетворяющего краевым условиям

$$\begin{aligned} z|_{\sigma} &= f(\xi) - \mu_2(y), z|_{BE} = \psi_1(y) - \mu_1(y), \\ z|_{OA_1} &= \varphi(y) - \mu_1(y), z|_{OA} = \psi(y) - \varphi(y) - \mu_2(y), \\ z_x|_{AA_1} &= v(y), \frac{\partial z}{\partial \eta}|_{\sigma} = f_1(\xi) - \mu_1'(y) \frac{\partial y}{\partial n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Единственность решение задачи 2 следует из принципа экстремума.
(Предполагается, что $\frac{\partial x}{\partial n} \neq 0$ вдоль дуги σ).

Определим $v_1(x)$. Поставляя значение $v_1(x)$ в формулу

$$z(x, y) = \int_0^1 v_1(t) G(x, y; t, 0) dt + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \bar{f}(\theta) \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{|\xi|=1} d\theta - \int_{-1}^0 v(t) G(x, y; 0, t) dt$$

имеем

$$z(x, y) = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \mu_2(\sin \theta) \rho_1(x, y; \theta) d\theta + P(x, y), \quad (6)$$

$\rho_1(x, y; \theta), P(x, y)$ – известные функции реализуя последнее условие из (5),
для определения $\mu_2'(y)$ получаем сингулярное интегральное уравнение (3).

$$\begin{aligned} \delta(\theta_0) \sin \theta_0 + \frac{\cos \theta_0}{2\pi} \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{\delta(\theta)}{\theta - \theta_0} d\theta - \frac{\sin \theta_0}{2\pi} \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{K_1(\theta, \theta_0) - K_1(\theta_0, \theta_0)}{\theta - \theta_0} \delta(\theta) d\theta + \\ + \frac{\cos \theta_0}{2\pi} \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{K_2(\theta, \theta_0) - K_2(\theta_0, \theta_0)}{\theta - \theta_0} \delta(\theta) d\theta + \frac{\cos \theta_0}{2\pi} \int_{3\pi/2}^{2\pi} Q(\theta, \theta_0) \delta(\theta) \cos \theta d\theta + \\ + \frac{\cos \theta_0}{2\pi} \int_{3\pi/2}^{2\pi} Q_1(\theta, \theta_0) \delta(\theta) \cos \theta d\theta = \rho_2(\theta_0), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\delta(\theta) = \mu_2'(\sin \theta); K_1(\theta, \theta_0), K_2(\theta, \theta_0), Q(\theta, \theta_0), Q_1(\theta, \theta_0)$ – известные функции.

Из уравнение (7) определим функцию $\mu_2(y)$. Таким образом, функция $u(x, y)$ полностью определяется в области D_2 .

Решение уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям

$$z|_{BE} = \psi(y) - \mu_1(y), \quad z|_{OB} = \tau(x), \quad z_x|_{AB} = \nu(y)$$

определяется по формуле

$$z(x, y) = \int_0^y \nu(t) \bar{G}(x, y; 0, t) dt - \int_0^y [\psi_1(t) - \mu_1(t)] \bar{G}_\xi(x, y; 1, t) dt - \int_0^y \nu(t) \bar{G}(x, y; t, 0) dt, \quad (8)$$

где $\bar{G}(x, y; \xi, \eta)$ – функция Грина.

Функция $z(x, y)$, определенная формулой (2) должна удовлетворять условию $z|_{OA_1} = \varphi(y) - \mu_1(y)$,

$$\varphi(y) - \mu_1(y) = \int_0^y \nu(t) \bar{G}(0, y; 0, t) dt - \int_0^y \tau(t) \bar{G}(0, y; t, 0) dt - \int_0^y [\psi(t) - \mu_1(t)] \bar{G}_\xi(0, y; 1, t) dt. \quad (9)$$

Реализуя условие $z|_{OA_1} = \psi(y) - \varphi(-y) - \mu_2(y)$ имеем

$$\psi(y) - \varphi(y) - \mu_2(y) = \int \mu_2(\sin \theta) \rho_1(0, y, \theta) d\theta + P(0, y). \quad (10)$$

Поставляя значение $\varphi(y)$ в формулу (9) для определения $\mu_1(y)$, получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\mu_1(y) + \int_0^y K(y, t) \mu_1(t) dt = P_2(y), \quad (11)$$

где $K(y, t)$, $P_2(y)$ – известные функции.

Из уравнения (11) единственным образом определяется функция $\mu_1(y)$.

Задача 2 редуцируется к определению регулярного решения уравнения (5) удовлетворяющего краевым условиям

$$\left. \begin{aligned} z|_\sigma &= f(\xi) - \mu_2(y), \quad z|_{x=e} = z|_{BE} = \varphi_1(y) - \mu_1(y), \\ z|_{OA_1} &= \varphi(y) - \mu_1(y), \quad z|_{OA} = \psi(y) - \varphi(y) - \mu_2(y), \\ z_x|_{AA_1} &= \nu(y) \frac{\partial z}{\partial n}|_\sigma = f_1(\xi) - \mu_2'(y) \frac{\partial z}{\partial n}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Через $\varphi(y), \varphi_1(y)$ обозначены соответственно значения $u(0, y), u(1, y)$ ($0 \leq y \leq 1$).

Единственность решения задачи 2 доказывается, используя принцип максимума в предположении, что $\frac{\partial x}{\partial n} \neq 0$ вдоль линии.

Существование решения задачи 2 области D_2 определяется как и в случае задачи 1 решение уравнение (5) удовлетворяющее краевым условиям

$$z|_{BE} = \varphi_1(y) - \mu_1(y), z|_{OB} = \tau(x), z_x|_{OA_1} = \nu(x),$$

дается формулой

$$z(x, y) = \int_0^y \nu(t) \bar{G}(x, y; 0, t) dt - \int_0^1 \tau(t) \bar{G}(x, y; t, 0) dt - \int_0^y [\varphi_1(t) - \mu_1(t)] \bar{G}_\xi(x, y; 1, t) dt, \quad (13)$$

$z(x, y)$ должно удовлетворять условию

$$\begin{aligned} z|_{z=e} &= \varphi_1(y) - \mu_1(y), \\ \varphi_1(y) - \mu_1(y) + \int_0^y [\varphi_1(t) - \mu_1(t)] \bar{G}_\xi(e, y; 1, t) dt &= \\ &= \int_0^y \nu(t) \bar{G}(e, y; 0, t) dt - \int_0^1 \tau(t) \bar{G}(e, y; t, 0) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Интегральное уравнения (14) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, из которого единственным образом определяется $\varphi_1(y) - \mu_1(y)$.

Реализуя условие $z|_{OA_1} = \varphi(y) - \mu_1(y)$ из (13) найдем

$$\begin{aligned} \mu_1(y) &= \varphi(y) + \int_0^y [\varphi_1(t) - \mu_1(t)] \bar{G}_\xi(e, y; 1, t) dt + \\ &+ \int_0^1 \tau(t) \bar{G}(e, y; t, 0) dt + \int_0^y \nu(t) \bar{G}(e, y; 0, t) dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Поставляя значение $\varphi(y), \varphi_1(y) - \mu_1(y)$ в формулу (15) определим функцию $\mu_1(y)$, где $\varphi(y)$ находится из формулы (8).

REFERENCES

1. Врагов В.И. Об одном уравнении смешанного – составного типа диф. урав. 1973. Т IX, №1. Стр. 169-171.
2. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. ОГИЗ. Гостехиздат. 1949.
3. Муминов, Ф. М., & Душатов, Н. Т. (2021). Нелокальная краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. *CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL & APPLIED SCIENCES*, 2(5), 191-196.
4. Муминов, Ф. М., Миратоев, З. М., & Утабов, У. А. (2021). Об Одной Краевой Задаче Для Уровнениясоставного Типа Третьего Порядка. *CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL & APPLIED SCIENCES*, 2(4), 17-22.
5. Муминов, Ф. М., & Миратоев, З. М. (2021). О нелокальной краевой задаче для одного неклассического уравнения. «. *Scientific progress*, 1(6), 922-927.
6. Muminov, F. M., Dushatov, N. T., & Miratoev, Z. M. (2022). Boundary Problem for a Third Order Equation of a Mixed Composite Type. *Eurasian Journal of Physics, Chemistry and Mathematics*, 5, 12-16.
7. Муминов, Ф. М., Самандаров, И. Р., Душатов, Н. Т., & Миратоев, З. М. (2022). О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СМЕЩАННОГО-СОСТАВНОГО ТИПА. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, 2(4), 260-265.
8. Муминов, Ф. М., Самандаров, И. Р., Душатов, Н. Т., & Миратоев, З. М. (2022). КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, 2(4), 218-224.
9. Сраждинов, И. Ф., Душатов, Н. Т., & Миратоев, З. М. (2022, April). Разрешимость начально-краевой задачи для одной системы составного типа. In *E Conference Zone* (pp. 50-51).
10. Muminov, F. M., Dushatov, N. T., & Miratoev, Z. M. (2022). NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A THIRD-ORDER MIXED-COMPOSITE TYPE EQUATION. *Web of Scientist: International Scientific Research Journal*, 3(4), 600-605.