Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences
Scientific Journal Impact Factor
VOLUME 1 | ISSUE 9
ISSN 2181-1784
SJIF 2021: 5.423

БАЪЗИ БИР ТЕСКАРИ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИ ЎЗ ИЧИГА ОЛГАН ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШ ҲАҚИДА

Э.О. Шарипов, ҚарМИИ доценти,
С.Ю. Шодиев, ҚарДУ катта ўқитувчиси,
Б.Н. Рахмонов, ҚарМИИ ўқитувчиси,

АННОТАЦИЯ

Ушбу мақолада айланалар радиусини топиш ва тескари тригонометрик функцияларни ўз ичига олган тенгламаларни ечиш кўникмасини ўқувчиларда ҳосил қилиш.

Таянч сўзлар: *айлана, радиус, тескари тригонометрик функциялар, тригонометрик алмаштиришлар, энг содда тригонометрик тенгламалар, тескари тригонометрик функцияларни ўз ичига олган тенгламалар.*

АННОТАЦИЯ

В этой статье учащиеся развивают способность находить радиусы окружностей и решать уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.

Ключевые слова: *круг, радиус, обратные тригонометрические функции, тригонометрические подстановки, простейшие тригонометрические уравнения, уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.*

ABSTRACT

In this article, students develop the ability to find the radii of circles and solve equations containing inverse trigonometric functions.

Keywords: *circle, radius, inverse trigonometric functions, trigonometric substitutions, simplest trigonometric equations, equations containing inverse trigonometric functions.*

КИРИШ

Ҳозирги кунда ўқувчиларнинг математика фанига бўлган қизиқишларини янада ошириш ҳамда тафаккурини ривожлантириш учун ўқитишнинг услубий асосларини такомиллаштириш зарурияти кузатилмоқда. Ёш авлоднинг математик қабилиятларини ривожлантириш энг долзарб масалалардан бири ҳисобланади. Чунки математик тафаккури ва дунёқараши кенг бўлса бошқа фанларни ўзлаштириши ҳам осон бўлади. Шу мақсадда давлатимиз томондан математика фанини ривожлантиришга кенг эътибор берилмоқда.

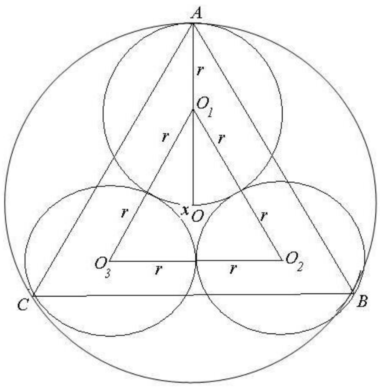
−Математика ҳамма аниқ фанларнинг асосидир. Бу фанни яхши билган бола ақлли, кенг тафаккурли бўлиб ўсади, исталган соҳада муваффақиятли ишлаб кетади, − Президентимиз [1].

Мақоланинг мақсади ўқувчиларнинг математикага бўлган қизиқишларини ошириш ва математик тафаккурини ривожлантиришда назарий фикрлашга етаклайдиган масалаларни ечиш мақсадга мофиқ деб ҳисоблаймиз.

МУҲОКАМА ВА НАТИЖАЛАР

Масала-1. Радиуси R га тенг айлана ичига жойлашган n та тенг айланалар ўзаро уринади ва берилган айланага ҳам уринади. Агар $n=3$ га тенг бўлса, шу айланаларнинг радиусларини топинг.

Ечиш: Кичик айланалар катта айланага уринган жойларини ва марказларни туташтирамиз ва ушбу расмни ҳосил қиламиз.



$AO=R$ $\Delta O_1O_2O_3$ томони $O_1O_2=O_2O_3=O_3O_1=2r$ $AK=2r:OK=x$ $x=R-2r$

$a_n=2R\sin\frac{180^0}{n}$ формула ёрдамида $a_3=2R\sin\frac{180^0}{3}=2R\sin 60^0=2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=R\sqrt{3}$

$\Delta ABC\sim\Delta O_1O_2O_3 \Rightarrow$ $\frac{AB}{O_1O_2}=\frac{AO}{OO_1}\Rightarrow$ $\frac{R\sqrt{3}}{2r}=\frac{R}{z+x}\Rightarrow$ $R\sqrt{3}(r+x)=2Rr\Rightarrow$

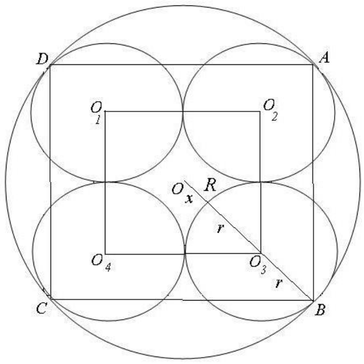
$\sqrt{3}Rr+R\sqrt{3}x=2Rr$ x ни ўрнига $x=R-2r$ қўйилса $\sqrt{3}Rr+R\sqrt{3}(R-2r)=2Rr\Rightarrow$

$\sqrt{2}Rr+R^2\sqrt{3}-2\sqrt{3}Rr-2Rr=0\Rightarrow$ $\sqrt{3}Rr+2Rr=R^2\sqrt{3}\Rightarrow$ $Rr\left(\sqrt{3}+2\right)=R^2\sqrt{3}\Rightarrow$

$r=\frac{R^2\sqrt{3}}{R\left(\sqrt{3}+2\right)}=\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$. Демак, $r=\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$.

Масала-2. Радиуси R га тенг айлана ичига жойлашган n та тенг айланалар ўзаро уринади ва берилган айланага ҳам уринади. Агар $n=4$ га тенг бўлса, шу айланаларнинг радиусларини топинг.

Ечиш. Энди $n=4$ ҳол учун ечамиз.



$a_4 = R\sqrt{2}$ $x = R - 2r$. Кадрат $ABCD$ ва $O_1O_2O_3O_4$ квадратлар ўзаро конгуруент. Бундан куйидаги пропорция тузамиз: $\frac{AB}{O_2O_3} = \frac{BO}{OO_3} \Rightarrow$ $\frac{R\sqrt{2}}{2r} = \frac{R}{r+x} \Rightarrow$ $R\sqrt{2}(z+x) = 2rR \Rightarrow$ $R\sqrt{2}r + R\sqrt{2}x = 2rR \Rightarrow$ x ни ўрнига $x = R - 2r$ ни қўямиз: $R\sqrt{2}r + R\sqrt{2}(R-2r) = 2rR \Rightarrow$ $R\sqrt{2}r + R^2\sqrt{2} - R2r\sqrt{2} - 2rR = 0 \Rightarrow$ $Rr\sqrt{2} + 2rR = R^2\sqrt{2} \Rightarrow$ $Rr(\sqrt{2}+2) = R^2\sqrt{2} \Rightarrow$ $r = \frac{R^2\sqrt{2}}{R\sqrt{2}+2} = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} = \frac{R}{1+\sqrt{2}}$. Демак, $n=4$ учун $r = \frac{R}{1+\sqrt{2}}$.

Энг содда тескари тригонометрик функцияларни ўз ичига олган тенгламаларни ечимлари жадвалини келтирамиз (1-жадвал):

1-жадвал.

Тескари тригонометрик функцияларни ўз ичига олган тенгламаларни ечимлари жадвали

Тенгламалар	**Ечимлари**
$\arg\sin x = a \quad \left(\lvert a\rvert \le \frac{\pi}{2}\right)$	$x = \sin a$
$\arg\cos x = a \quad (0 \le a \le \pi)$	$x = \cos a$
$\arg tgx = a \quad \left(\lvert a\rvert < \frac{\pi}{2}\right)$	$x = tga$
$\arg ctgx = a \quad (0 < a < \pi)$	$x = ctga$

Шунингдек бир турдаги тригонометрик функцияни бошқа турдаги тригонометрик функцияга алмаштиришни куйидаги жадвалини келтирамиз (2-жадвал):

2-жадвал.

Бир турдаги тригонометрик функцияни бошқа турдаги тригонометрик функцияга алмаштириш жадвали

$\sin(\arcsin x) = x$	$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$	$\cos(\arccos x)=x$
$\sin(arctgx)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(arctgx)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\sin(arcctgx)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(arcctgx)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$tg(\arcsin x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$ctg(\arcsin x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
$tg(\arccos x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$ctg(\arccos x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$tg(arctgx)=x$	$ctg(arctgx)=\dfrac{1}{x}$
$tg(arcctgx)=\dfrac{1}{x}$	$ctg(arcctgx)=x$

Қуйидаги тенгламаларни ечишни қараймиз**.**

Мисол-3. $arctg^2\dfrac{x}{3}-4arctg\dfrac{x}{3}-5=0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $y=arctg\dfrac{x}{3}$ янги номаълумни киритиб, қуйидаги тенгламани оламиз $y^2-4y-5=0$ бу тенгламани ечими: $y_1=5$, $y_2=-1$. Демак, дастабки тенглама иккита содда тенгламага ажралади: $arctg\dfrac{x}{3}=5$, $arctg\dfrac{x}{3}=-1$. Биринчи содда тенглама $5>\dfrac{\pi}{2}$ бўлгани учун ечимга эга эмас. Иккинчи содда тенглама $|-1|<\dfrac{\pi}{2}$ бўлгани учун ягона ечимга эга бўлади. Бу ягона ечим $arctg\dfrac{x}{3}=-1$, $x=3tg(-1)$. Жавоб $x=-3tg1$ бўлади [2].

Мисол-4. $arctg\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+arctg\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Берилган тенгламани иккала қисмидан тангенс оламиз: $tg\left[arctg\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+arctg\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right]=tg\left[\dfrac{\pi}{4}\right]$ бунда, $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$ ва $tg\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ тенгликларни ҳисобга олиб, $\dfrac{tg\left[arctg\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right]+tg\left[arctg\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right]}{1-tg\left[arctg\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right]\cdot tg\left[arctg\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right]}=1$ 2-жадвалга кўра: $\dfrac{x+\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}}{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}=1$ ёки $\dfrac{2x}{1-x^2+\frac{1}{4}}=14$ бундан $x^2+8x-5=0$ бу тенгламани ечими: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{5}{2}$. Жавоб $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{5}{2}$ бўлади.

Мисол-5. $\arcsin\dfrac{2}{3\sqrt{x}}-\arcsin\sqrt{1-x}=\arcsin\dfrac{1}{3}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Берилган тенгламани иккала қисмидан синус оламиз: $\sin\left[\arcsin\dfrac{2}{3\sqrt{x}}-\arcsin\sqrt{1-x}\right]=\sin\left[\arcsin\dfrac{1}{3}\right]$ $\Rightarrow$ $\sin\left(\arcsin\dfrac{2}{3\sqrt{x}}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\sqrt{1-x}\right)-\cos\left(\arcsin\dfrac{2}{3\sqrt{x}}\right)\cdot\sin\left(\arcsin\sqrt{1-x}\right)=\dfrac{1}{3}$ 2-жадвалга асосан қуйидагига эга бўламиз: $\dfrac{2}{3\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3\sqrt{x}}\right)^2}\cdot\sqrt{1-x}=\dfrac{1}{3}$ $\dfrac{2}{3\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{9x-4}}{3\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1-x}=\dfrac{1}{3}$ ёки $\sqrt{x}=\sqrt{(9x-4)(1-x)}$ ёки $9x^2-12x+4=0$ бундан $(3x-2)^2=0$, $x=\dfrac{2}{3}$. Жавоб $x=\dfrac{2}{3}$ бўлади.

Мисол-6. $2\arccos x=arcctg\dfrac{2x^2-1}{2x\sqrt{1-x^2}}$ тенгламани барча ечимларини топинг.

Ечиш. $y=\arccos x$ функциянинг таърифига кўра қуйидагига эга бўламиз: $x=\cos y$, бунда $0\le y\le\pi$, $|x|\le 1$ бўлади. x нинг ифодасини берилган тенгламани ўнг томонига қуйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $arcctg\dfrac{2x^2-1}{2x\sqrt{1-x^2}}=arcctg\dfrac{2\cos^2 y-1}{2\cos y\sqrt{1-\cos^2 y}}=arcctg\dfrac{\cos^2 y-\sin^2 y}{2\cos y\cdot\sin y}=arcctg\dfrac{\cos 2y}{\sin 2y}=$ $=arcctg(ctg\,2y)=2y$ бунда $0<y<\dfrac{\pi}{2}$. Шундай қилиб берилган тенгламани чап томони барча $y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ учун ўнг томони ҳам $2y$ га тенг бўлади. Дастлабки номаълумга қайтиб, $x\in(0;1)$ ни ҳосил қиламиз. Жавоб $x\in(0;1)$ бўлади [3].

Мисол-7. $arctg(x-1)+arctgx+arctg(x+1)=arctg3x$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз: $arctg(x-1)+arctg(x+1)=arctg3x-arctgx$. Тенгламани иккала томонида тангенс оламиз: $tg[arctg(x-1)+arctg(x+1)]=tg[arctg3x-arctgx]$ ёки

$$\frac{tg[arctg(x-1)]+tg[arctg(x+1)]}{1-tg[arctg(x-1)]\cdot tg[arctg(x+1)]}=\frac{tg[arctg3x]-tg[arctgx]}{1+tg[arctg3x]\cdot tg[arctgx]}$$ ёки $$\frac{(x-1)+(x+1)}{1-(x-1)(x+1)}=\frac{3x-x}{1+3x\cdot x}\Rightarrow\frac{x}{2-x^2}=\frac{x}{1+3x^2}$$,бундан $4x^3-x=x(4x^2-1)=0$ бу тенглама ечимлари $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{2}$. Жавоб $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{2}$ бўлади [4].

ХУЛОСА

Шу каби масала ва мисолларни ечиш орқали ўқувчиларда математика фанига бўлган қизиқишни ва мантиқий фикрлашни ортириб, олган билимларини амалиётга қўллаш ва тўғри қарор қабул қилиши компентиклигини ривожлантиришга ёрдам беради.

Мустақил ечиш учун тенгламалар.

Масала-1. Радиуси R га тенг айлана ичига жойлашган n та тенг айланалар ўзаро уринади ва берилган айланага ҳам уринади. Агар $n=6$ га тенг бўлса, шу айланаларнинг радиусларини топинг.

Мисол-2. $2\arcsin x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2/9}{\arcsin x}$;

Мисол-3. $\arcsin x+\arccos(x-1)=\pi$;

Мисол-4. $arctg2x+arctg3x=\frac{3\pi}{4}$;

Мисол-5. $\arccos x=\pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

Мисол-7. $2\arccos x=\arccos(2x^2-1)$.

REFERENCES

1. Халқ сўзи газетаси, 1 февраль 2020 йил №24.

2.Э.О.Шарипов, К.Н.Холов, Р.Омонов “Тригонометрик функцияларнинг қийматини ҳисоблаш мавзусини ўқитиш методикаси” Физика, математика ва информатика Тошкент 3/2013 й.

3. Ғуломов О, Шарипов Э, Шодиев С “Олимпиада масалалари ечими” ФИМ 2015йил.

4. Мирзахмедов М.А., Сотволдиев Д.А. “Ўқувчиларни математик олимпиадаларга тайёрлаш” Т., Ўқитувчи, 1983.