BA'ZI MASALALARNING YECHILISHI

Egamov M. X.
Qarshi muhandislik-iqtisodiyot instituti dotsenti
Berdiyev D.F.
Qarshi muhandislik-iqtisodiyot instituti o'qituvchisi
Abdullayev A.K.
Qamashi tumani 85- sonli umumiy o'rta ta'lim maktabi o'qtuvchisi

ANNOTATSIYA

Maqolada matematika bo'yicha ba'zi masalalarining yechish yo'llari ko'rsatilgan.

Tayanch so'zlar: *funksiya, ellips, maksimum, kritik, chegaralangan, yuqoridan, quyidan, ketma-ketlik, kamayuvchi, o'suvchi, limit.*

АННОТАЦИЯ

В статье показаны пути решения некоторых задач по математике.

Ключевые слова: *функция, эллипс, максимум, критическая, последовательность, ограниченная, с верху, с низу, убывающая, возрастающая, лимит.*

ABSTRACT

Solutions of some tasks in mathematics are shown in article.

Keywords: *function, an ellipse, at most, critical, the sequence, limited, with top, with a bottom, decreasing, increasing, a limit.*

KIRISH

Maqolada keltirilgan masalalar va ularning yechilishi, matematikaga qiziquvchilar uchun uslubiy yordam bo'ladi, deb hisoblaymiz hamda o'quvchilarning ijodiy fikrlash qobiliyatlarini o'stirishga xizmat qiladi.

1-masala. Hajmi V ga teng va eng kichik sirtga ega bo'lgan to'g'ri to'rt burchakli ochiq hovuzning o'lchovlari topilsin.

Yechish. Ma'lumki, to'g'ri to'rt burchakli ochiq hovuz parallepiped shaklida bo'lib, uning hajmi $V = S_{acoc}H$ ga teng. Asos tomonlarini x va y desak, uning yuzi $S_{asos} = xy$ va bundan $H = \frac{V}{S_{asos}} = \frac{V}{xy}$ $(*)$. Berilgan to'g'ri to'rt burchakli ochiq havuzning sirti $S_{sirti} = xy + 2H(x+y) \overset{(*)}{=} xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = f(x;y)$ ikki o'zgaruvchining funksiyasi bo'ldi. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumga ega bo'lishining zaruriy shartiga ko‘ra $\begin{cases} f_x'(x;y)=\left(xy+2V\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right)_x' = y-\frac{2V}{x^2}=0 \\ f_y'(x;y)=\left(xy+2V\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right)_y' = x-\frac{2V}{y^2}=0 \end{cases}$ bundan $\begin{cases} y=\frac{2V}{x^2} \\ x-\frac{2V}{\left(\frac{2V}{x^2}\right)^2}=0 \end{cases}$

kelib chiqadi. Demak, $\begin{cases} y=\frac{2V}{x^2} \\ x\left(2V-x^3\right)=0 \end{cases}$ bundan $x=y=\sqrt[3]{2V}$ va $H=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$ bo‘ladi.

Uning sirti $S_{sirti}=3\sqrt[3]{4V^2}$ ga teng.

2-masala. Muntazam uchburchakli piramida asosining bir tomoni bilan piramida balandligining yig‘indisi bir metr. Shunday piramidalar ichidan eng katta hajmlisi topilsin.

Yechish. Agar piramida tomoni uzunligini x desak, u holda masala shartidan $a+H=1 \Rightarrow H=1-a=1-x$ bo‘lib, muntazam uchburchakli piramida hajmi $V(x)=\frac{\sqrt{3}}{12}x^2(1-x)$ bo‘ladi. Bu funksiyaning hosilasi $V'(x)=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(2x-3x^2\right)$ bo‘lib, $x(2-3x)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=\frac{2}{3}$ bu nuqtalarda funksiya hosilasi nolga aylanadi. Bu nuqtalar son o‘qini $(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ oraliqlarga ajratadi. Shu sababli

$\begin{cases} x\in(-\infty;0)\Rightarrow V'<0, \downarrow \\ x\in\left(0;\frac{2}{3}\right)\Rightarrow V'>0, \uparrow \end{cases}$, $\begin{cases} x\in\left(0;\frac{2}{3}\right)\Rightarrow V'>0, \uparrow \\ x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)\Rightarrow V'<0, \downarrow \end{cases}$ $\Rightarrow V_{\max}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{81}$ bo‘ladi. Demak,

$x=a=\frac{2}{3},\ H=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ bo‘ladi.

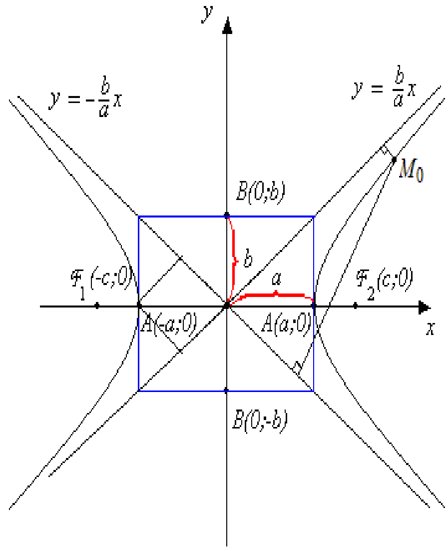
3-masala. Birinchi avtomobil $y=x^2+4$ parabola bo‘yicha va ikkinchi avtomobil $y=-x-4$ to‘g‘ri chiziq bo‘yicha harakatlansa, avtomobillar orasidagi eng qisqa masofani toping.

Yechish. Ma’lumki, $y=-x-4$ to‘g‘ri chiziq va $y=x^2+4$ parabola orasidagi eng qisqa masofa, $y=-x-4$ to‘g‘ri chiziq va parabolaning $y=-x-4$ to‘g‘ri chiziqqa paralel urinma to‘g‘ri chizig‘i orasidagi masofa bo‘ladi. $y=x^2+4$ parabolaning urinma to‘g‘ri chiziqlari $y=kx+b$ ko‘rinishda bo‘lib, $y=-x-4$ to‘g‘ri chiziqqa paralel bo‘lgani uchun $k=-1$ ga teng. Bundan

$$y'(x_0)=2x_0=-1 \quad\Rightarrow\quad x_0=\frac{-1}{2};\quad y_0=\frac{17}{4} \quad\Rightarrow\quad M_0\left(\frac{-1}{2};\frac{17}{4}\right)$$

nuqtasidan $y=-x-4$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{29}{4\sqrt{2}}$ ga teng bo‘ladi.

4-masala. Uchlaridan biri $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ giperbolaning nuqtasi bo‘lib, ikki tomoni shu girebolaning asimptotalarida yotuvchi romb yuzini toping.



Yechish. Asimtotasi $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ bo‘lib, burchak koefitseti $tg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{b}{a}=k$ bo‘ladi.

Bundan $tg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{b}{a}$. Shuningdek, burchakning sinusi va kosinusi ta’rifiga ko‘ra: $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $(*)$. Kosinuslar teoremasidan foydalanilsa:

$$x^2=a^2+x^2-2ax\cos\frac{\alpha}{2} \quad\Rightarrow\quad 2\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{x} \quad\overset{(*)}{\Rightarrow}\quad x=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \qquad (**)$$

bo‘ladi. ΔABC yuzi $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin\alpha=\dfrac{1}{2}x^2\sin\alpha$ budan rombning yuzi $S_{ромб}=2\cdot S_{\Delta ABC}=x^2\sin\alpha\overset{(**)}{=}\dfrac{a^2+b^2}{4}\cdot 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\overset{(*)}{=}\dfrac{ab}{2}$ bo‘ladi.

5-masala. Hozirgi zamon elektron hisoblash mashinalari yordamida musbat a sonidan kvadrat ildiz chiqarishda foydalaniladigan $\{x_n\}$ ketma- ketlikni qaraymiz. Bu ketma-ketlik ushbu $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$, $n=1,2,3,\ldots$. rekurrent formula bilan aniqlanadi, bu yerda x_1 sifatida ixtiyoriy musbat sonni olish mumkin. Bu ketma-ketlikning yaqilashuvchiligini hamda $\sqrt{a}$ soni uning limiti ekanini isbotlang.

MUHOKAMA VA NATIJALAR

Isboti. Shartga ko‘ra $x_1>0$ bo‘lgan holda rekurrent formuladan, ya’ni $n=1$ bo‘lganda $x_2=\dfrac{1}{2}\left(x_1+\dfrac{a}{x_1}\right)$ dan $x_2>0$ ekani kelib chiqadi. Bundan esa, yana o‘sha formuladan, $n=2$ bo'lganda $x_3>0$ ekani kelib chiqadi. Buni davom ettirsak, hamma x_n lar uchun $x_n>0$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi, $n\geq 2$ da ham x_n lar $x_n\geq\sqrt{a}$ tengsizlikni qanoatlantirishni ko'rsatamiz. Rekurrent formulani ushbu $x_{n+1}=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$ ko'rinishda ifodalab, ixtiyoriy $t>0$ $\left(t=\frac{x_n}{\sqrt{a}}\right)$ uchun $f(t)=t+\frac{1}{t}$ funksiyaning qiymati 2 dan kam emasligidan ($t+\frac{1}{t}\geq 2$ tengsizligiga ko'ra) foydalanamiz. Ixtiyoriy $n\geq 1$ uchun $x_{n+1}\geq\sqrt{a}$ ekanini va $n=2$ nomerdan boshlab

$$x_{n+1}=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\geq\frac{\sqrt{a}}{2}\cdot 2=\sqrt{a}\quad\Rightarrow\ x_n\geq\sqrt{a}$$

ekanini hosil qilamiz. Nihoyat $n\geq 2$ da $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'smaydi, rekurrent formuladan $x_{n+1}=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)\Rightarrow\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)$ ni topamiz, bunda esa $x_n\geq\sqrt{a}$ ekanini hisobga olgan holda $\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq 1$ yoki $x_n\geq x_{n+1}$ ga ega bo'lamiz. Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $n\geq 2$ da o'smaydigan(kamayuvchi) bo'lgani uchun va quyidan $\sqrt{a}$ son bilan chegaralanganligi uchun u limitga ega. Bu limitni c bilan belgilab, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$ va $c=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)=\frac{1}{2}\left(c+\frac{a}{c}\right)$ ni hisobga olib $c=\frac{1}{2}\left(c+\frac{a}{c}\right)$ ega bo'lamiz. Demak, $c=\sqrt{a}$. Shunday qilib, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c=\sqrt{a}$ ekanligini isbot qildik.

XULOSA

Bunda x_1 ni to'g'ri tanlash: $a>1$ bo'lganda x_4 soni $\sqrt{a}$ sonidan farqi 10^{-10} sonidan ortmaydi. Biz yuqorida ketma-ketlikni limitga ega ekanligini ko'rsatishda quydagi teoremadan foydalikdik. **Teorema.** Agar o'suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda ketma-ketlik limitga ega bo'ladi.

REFERENCES

1. Мирзахмедов М.А., Сотволдиев Д.А. Ўқувчиларни математик олимпиадаларга тайёрлаш. Т. Ўқитувчи, 1983.

2. Бердиқулов М.А, Исломов Й. Ўхшашлик билан боғлиқ масалалар. 2 Ҳажм мавзуси. Физика, математика ва информатика журнали. 4-сон 2013 йил.
3. Демидович Б.П. “Сборник задач и упражнений по математическому анализу” М. Наука, 1977.
4. Ғуломов О, Шарипов Э, Шодиев С. “Олимпиада масалалари ечими” ФМИ, 2015 йил.