

ARIFMETIK—GEOMETRIK PROGRESSIYA VA UNGA DOIR AYRIM MISOLLARNI YECHISH.

Djabbarov Odil Djurayevich

Angren Universiteti katta o'qituvchisi

odilxon455@gmail.com

ANNOTATSIYA

Maqolada o'rta maktab matematika kursida o'rganilgan arifmetik va geometrik progressiya mavzularini umumlashmasi bo'lgan arifmetik-geometrik progressiya tushunchasi keltirilgan bo'lib, uning umumiy hadi va yig'indisi formulasi keltirilgan. Mavzuga doir misollar yechimlari ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Arifmetik progressiya, geometrik progressiya, ketma-ketlik, ketma-ketlik hadi, yig'indi, Abel almashtirishi.

АННОТАЦИЯ

В статье представлено понятие арифметико-геометрической прогрессии, являющейся обобщением тем арифметической и геометрической прогрессии, изучаемых в школьном курсе математики, и приведена формула для её общего члена и суммы. Приведены решения примеров по данной теме.

Ключевые слова: Арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, последовательность, член последовательности, сумма, преобразования Абеля.

ABSTRACT

The article presents the concept of arithmetic-geometric progression, which is a generalization of the topics of arithmetic and geometric progression studied in the high school mathematics course, and presents the formula for its general term and sum. Solutions to examples on the topic are shown.

Keywords: Arithmetic progression, geometric progression, sequence, term of sequence, sum, Abel transformation.

KIRISH

Ma'lumki, o'rta maktabda arifmetik va geometrik progressiyalar haqida yetarlicha ma'lumotlar berilgan. Ularning arifmetik va geometrik deb atalishiga sabab ularning hadlari orasida o'rta arifmetik va o'rta geometrik munosabat o'rinli ekanligidir. Bu progressiyalarga doir misollarni qadimgi qo'lyozmalarda ham uchratish mumkin. Bu progressiyalarga doir ayrim masalalarni keltirib o'taylik.

1-masala. Buyurtmachi ishchiga quduq qazib berishi uchun dastlabki birinchi metri uchun 30000 so'm, ikkinchi metri uchun 50000 so'm, uchinchi metri uchun esa

70000 so'm va h.k. to'lashini ayrgan bo'lsa, ishchi 12 metr qazigani uchun qancha haq oladi?

Yechish. Arifmetik progressiyada $a_1=30000$; $d= 20000$; $n= 12$ bo'lganligi sababli ishchi

$$S_{12} = \frac{(2 \times 30000 + 20000 \times 11) \times 12}{2} = 1680000 \text{ so'm oladi.}$$

2-masala. 15000000 million bo'lgan shahar aholisi har yili 10% ga oshsa, 4 yildan so'ng shahar aholisi qancha bo'ladi?

Yechish. Shahar aholisi geometrik tarzda oshadi, shuning uchun

$$X = (1,1)^4 \times 15000000 = 21961500 \text{ kishiga teng bo'ladi.}$$

3-masala. Omonat kassada 1000000 so'mi bo'lgan mijozga bank yiliga 25% to'lov qilsa, 2 yildan so'ng mijoz necha so'm pul oladi? (javob: 1562500 so'm)

4- masala. Davriy o'nli kasrlarni oddiy kasrlarga keltirishda geometrik progressiyani tadbiq qilsa bo'ladi. Masalan, $0,232323\dots$ davriy o'nli kasrni oddiy kasrga keltiraylik.

$$0,232323\dots = 0,23 + 0,0023 + 0,000023 + \dots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \dots = \frac{23}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \dots\right) = \frac{23}{99}.$$

5-masala. To'g'ri burchakli uchburchakning tomonlari arifmetik progressiya tashkil qiladimi? (javob: 3a; 4a; 5a)

6-masala. 10; 11 va 12 sonlar bitta geometrik progressiya hadlari bo'la oladimi? (javob: yo'q)

7-masala. 1;4;7;10;... va 1;5;9;13;... progressiyalarning 121 ta hadlari ichida nechta bir xil hadlari bor? (javob: 11 ta)

Yuqoridagi masalalarni arifmetik va geometrik progressiyaning n -chi hadi va n -ta hadi yig'indisi formulalari orqali yechish mumkin.

Lekin maktabda ham arifmetik ham geometrik progressiyani beruvchi ketma-ketlik haqida ma'lumot berilmagan. Biz bilamizki,

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \text{ va } b_n = b_1 q^{n-1}$$

ketma-ketliklar mos ravishda arifmetik va geometrik progressiyalarni n -chi hadi formulasi beradi.

Quyidagi ko'rinishdagi ketma-ketlik

$$c_n = (a_1 + (n - 1)d)q^{n-1}$$

arifmetik-geometrik progressiya hadlarini beradi. Agar $q = 1$ bo'lsa, ketma-ketlik hadlari $a_1 + (n - 1)d$ bo'lib, u arifmetik progressiyani beradi, uning uchun

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} n$$

yig'indiga teng bo'ladi.

Agar $d = 0$ bo'lsa, ketma-ketlik hadlari $a_1 q^{n-1}$ bo'lib, u geometrik progressiyani beradi, uning uchun $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ yig'indiga teng bo'ladi.

Agar $d \neq 0$ va $q \neq 1$ bo'lsa, u holda ketma-ketlik yig'indisini qanday topamiz? Bu savolga javob berish uchun c_n hadni quyidagicha shakl almashtiramiz:

$$c_n = (a_1 + (n - 1)d)q^{n-1} = (a_1 - d)q^{n-1} + dnq^{n-1}$$

Birinchi yig'indi geometrik progressiyani beradi, uning uchun

$$S'_n = a_1 - d \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

ga teng bo'ladi. Ikkinchi yig'indi esa

$$S''_n = d \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}$$

ko'rinishda bo'lib, uning yig'indisini quyidagi sxema yordamida topamiz.

$$\left. \begin{aligned} 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} &= \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} &= \frac{q(q^{n-1} - 1)}{q - 1} \\ q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n-1} &= \frac{q^2(q^{n-2} - 1)}{q - 1} \\ q^{n-2} + q^{n-1} &= \frac{q^{n-2}(q^2 - 1)}{q - 1} \\ q^{n-1} &= \frac{q^{n-1}(q - 1)}{q - 1} \end{aligned} \right\}$$

Sistemani hadma-had qo'shib,

$$\begin{aligned} 1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} &= \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{q^n - q}{q - 1} + \frac{q^n - q^2}{q - 1} + \dots + \frac{q^n - q^{n-1}}{q - 1} \\ &= \frac{1}{q - 1} [nq^n - (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})] = \frac{1}{q - 1} \left[nq^n - \frac{q^n - 1}{q - 1} \right] \\ &= \frac{1}{q - 1} \frac{nq^{n+1} - nq^n - q^n + 1}{q - 1} \end{aligned}$$

ni hosil qilamiz. U holda

$$S_n = S'_n + d S''_n = \left(a_1 - d \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{d}{q - 1} \frac{nq^{n+1} - nq^n - q^n + 1}{q - 1} \right)$$

ga teng bo'ladi.

Endi bu formulani tadbiq etib, quyidagi misollarni yechaylik.

Demak, arifmetik- geometrik progressiya uchun qiyidagi formulalar o'rinli ekan:

$$c_n = (c_1 + \frac{d}{q-1})q^{n-1} - \frac{d}{q-1},$$

$$S_n = (c_1 + \frac{d}{q-1})\frac{q^n - 1}{q-1} - \frac{nd}{q-1}.$$

Endi bu formulalarni tatbiq etib, quyidagi misollarni yechaylik.

1- misol. Hadlari quyidagicha bo'lgan ketma-ketlik arifmetik- geometrik progressiya tashkil qiladimi? a) 1; 4; 10; 22;... b) 4; 18; 60; 185;...

Agar bo'lsa, d va q larni toping.

Yechish. a) $c_2 = d + c_1q$ va $c_3 = d + c_2q$ sistemadan $4 = d + q$; $10 = d + 4q$ ni hosil qilib, uning $d = 2$ va $q = 2$ yechimini topamiz. So'ngra c_4 ni hisoblasak, $c_4 = 22$ ni hosil qilamiz. Demak, bu sonlar ketma-ketligi arifmetik- geometrik progressiya tashkil qilar ekan.

b) $c_2 = d + c_1q$ va $c_3 = d + c_2q$ sistemadan $d + 4q = 18$, $d + 18q = 60$ sistemani yechimi $d = 6$ va $q = 3$ ni hosil qilamiz. So'ngra c_4 ni hisoblasak, $c_4 = 186$ ni hosil qilamiz, ammo $c_4 = 185$ bo'lishi kerak edi. Demak, bu sonlar ketma-ketligi arifmetik- geometrik progressiya tashkil qilmas ekan.

2- misol. Agar arifmetik- geometrik progressiya uchun $c_1 = 5$, $d = 3$ va $q = 2$ bo'lsa, S_5 ni hisoblang.

Yechish. $S_5 = (5 + \frac{3}{2-1})\frac{2^5 - 1}{2-1} - \frac{5 \cdot 3}{2-1} = 233$ ga teng bo'ladi.

3 – misol. Burchaklari arifmetik- geometrik progressiya tashkil qiluvchi oltiburchakli ko'pburchak uchun $q = 2$ va eng katta burchagi 160° ga teng bo'lsa, oltiburchakli ko'pburchakning qolgan burchaklarini toping.

Yechish. Ko'pburchak ichki burchaklari yig'indisi $(n - 2) 180^\circ$ formulaga asosan 720° ni topamiz. $c_6 = 160^\circ$ va $S_6 = 720^\circ$ larni e'tiborga olib,

$$c_6 = (c_1 + \frac{d}{2-1})2^5 - \frac{d}{2-1} = 160^\circ,$$

$$S_6 = (c_1 + \frac{d}{2-1})\frac{2^6 - 1}{2-1} - \frac{6d}{2-1} = 720^\circ$$

sistemani yechamiz. $32c_1 + 31d = 160^\circ$, $63c_1 + 57d = 720^\circ$ ning yechimi

$$c_1 = \frac{4400^\circ}{43}, d = -\frac{5600}{43} \text{ bo'ladi.}$$

U holda ko'pburchakning qolgan burchaklari

$$c_2 = \frac{4480^\circ}{43}, c_3 = \frac{4640^\circ}{43}, c_4 = \frac{4960^\circ}{43}, c_5 = \frac{5600^\circ}{43}$$

ga teng bo'ladi.

4-misol.

$$\sum_{k=1}^n k 2^{k-1}$$

yig'indini hisoblang.

Yechish. $c_n = n2^{n-1}$ hadlaridan n arifmetik progressiyani berib, $a_1 = 1$, $d = 1$ ni topamiz, 2^{n-1} geometrik progressiyani berib, $q = 2$ ni topamiz. U holda yuqoridagi formulaga asosan:

$$\begin{aligned} S_n &= (1-1) \frac{2^n - 1}{2 - 1} + \frac{1}{2 - 1} \frac{n 2^{n+1} - n 2^n - 2^n + 1}{2 - 1} = n 2^{n+1} - n 2^n - 2^n + 1 \\ &= 2n 2^n - n 2^n - 2^n + 1 = n 2^n - 2^n + 1 = (n-1)2^n + 1 \end{aligned}$$

yig'indisini topamiz.

5-misol. $\sum_{k=1}^n (2k+3) 3^{k-1}$ yig'indini hisoblang.

Yechish. $c_n = (2n+3)3^{n-1}$ haddan $a_1 = 5$, $d = 2$, $q = 3$ larni topib, formulani tadbiq etib, quyidagi yig'indini topamiz:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (2k+3) 3^{k-1} = (5-2) \frac{3^n - 1}{3 - 1} + \frac{2}{3 - 1} \frac{n 3^{n+1} - n 3^n - 3^n + 1}{3 - 1} \\ &= \frac{3^{n+1} - 3}{2} + \frac{n 3^{n+1} - n 3^n - 3^n + 1}{2} = \frac{2 3^n + 2n 3^n - 2}{2} \\ &= (n+1)3^n - 1 \end{aligned}$$

Arifmetik–geometrik progressiyani yig'indisini topishda

$$\sum_{k=1}^n k q^{k-1}$$

ifoda nimaga teng bo'lishini Abel almashtirishi orqali topish mumkin.

Aytaylik bizga $S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ yig'indi berilgan bo'lsin.

$b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3, \dots, b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ larni mos ravishda

$B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ bilan belgilaymiz. U holda

$b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, b_3 = B_3 - B_2, \dots, b_k = B_k - B_{k-1}$ bo'lib,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k$$

ni quyidagicha almashtirish mumkin:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + a_3(B_3 - B_2) + \dots + a_n(B_n - B_{n-1}) \\ &= (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_n B_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n\end{aligned}$$

Bu almashtirish Abel almashtirish deyiladi. Endi Abel almashtirish yordamida

$$\sum_{k=1}^n k q^{k-1}$$

yig'indini topaylik. $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_n = n, b_1 = 1, b_2 = q, \dots, b_n = q^{n-1}$ ni e'tiborga olib, $B_k = \frac{q^k - 1}{q - 1}$ va $a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = \dots = a_{n-1} - a_n = -1$ dan foydalanib,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k q^{k-1} &= \sum_{k=1}^n -1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + n \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ &= \frac{1}{q - 1} \sum_{k=1}^n (q^k - 1) + n \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1}{q - 1} \left(\frac{q^{n+1} - q}{q - 1} - n \right) + n \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ &= \frac{nq^n}{q - 1} - \frac{q^n - 1}{(q - 1)^2}\end{aligned}$$

XULOSA

O'rta maktab kursida o'tilgan arifmetik va geometrik progressiya haqidagi tushunchalar orasidagi munosabatlardan kelib chiqadigan formulalartahlil qilish, bu ikki progressiyalarni umumlashgan formulasiga doir misollarni yechish va o'rganish o'quvchilarga matematik tushunchalarni analogiyasini yaratishga imkon beradigan omil sifatida qarash mumkin. Bu mavzuni o'rganishda Abel almashtirishi muhim ahamiyatga ega ekanligi ko'rsatildi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI (REFERENCES)

1. Djabbarov. O.Dj., & Iskandarov. S. D. (2021). TEYLOR FORMULASI VA UNING TURLI MATEMATIK MASALALARGA QO'LLANILISHI. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*. 1(3), 773-778.

2. Djabbarov. O.Dj. & Abdiashimova. M. (2021) MATEMATIKA FANINI O'RGANISHDA QIZIQARLI MASALALARNING O'RNI HAQIDA. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, 1(2). 233-236.
3. Djabbarov, Odil Djurayevich; Jonqobilov, Jahongir Tirkashevich. AYNIYAT, TENGSIZLIKLARNI ISBOTLASH VA IFODALARNI SODDALASHTIRISHDA HOSILADAN FOYDALANISH. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*.3(3) 173-177
4. L.Ya.Savelev.Olimpiadi,algebra,kombinatorika. Novosibirsk.1079.
5. A.M.Rubinov, K.Sh.Shapiey. Elementi matematicheskogo analiza. Moskva,1972.
6. I.I.Lyashko va boshqalar. Spravochnoe posobie po matematicheskomu analizu. Kiev,1984.
7. Yu.S.Ochan. Sbornik zadach po matematicheskomu analizu.Moskva,1981.
8. V.A.Ilin, E.G. Poznyak. Matematik analiz asoslari. 1-qism.Toshkent,1981.