TASODIFIY INDEKSLI YIG'INDINING MOMENT XOSSALARI HAQIDA

Dushatov N.T.
Olmaliq davlat texnika instituti
n_dushatov@rambler.ru

ANNOTATSIYA

Ushbu ishda tasodifiy indeksli yig'indining matematik kutilmasi va dispersiyasi uchun analitik formulalar keltirib chiqarilgan. Qo'shiluvchilar mustaqil va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlardan iborat bo'lganda, shartli matematik kutilma va to'liq dispersiya formulasi yordamida asosiy moment xarakteristikalari olingan. Shuningdek, Puasson indeksli xususiy hol tahlil qilinib, dispersiyaning soddalashtirilgan ifodasi hosil qilingan. Olingan natijalar sug'urta matematikasi, navbatlar nazariyasi va statistik modellashtirish masalalarida qo'llanilishi mumkin.

Kalit so'zlar: *tasodifiy yig'indi, tasodifiy indeks, matematik kutilma, dispersiya, shartli matematik kutilma, to'liq dispersiya formulasi, Puasson taqsimoti, momentlar, ehtimollar nazariyasi, statistik modellashtirish.*

ABSTRACT

In this paper, analytical formulas for the expectation and variance of a randomly indexed sum are derived. Assuming that the summands are independent and identically distributed random variables, the main moment characteristics are obtained by applying the conditional expectation and the law of total variance. In addition, a special case with a Poisson-distributed index is investigated, and a simplified expression for the variance is established. The obtained results can be applied in actuarial mathematics, queueing theory, and statistical modeling problems.

Keywords: *randomly indexed sum, random index, mathematical expectation, variance, conditional expectation, law of total variance, Poisson distribution, moments, probability theory, statistical modeling.*

Tasodifiy indeksli yig'indilar ehtimollar nazariyasining muhim obyektlaridan biri hisoblanadi [1]. Bunday yig'indilar sug'urta risklari nazariyasida, navbatlar nazariyasida, ishonchlilik nazariyasida va statistik modellashtirish masalalarida keng uchraydi [1,2]. Tasodifiy yig'indilarni o'rganishda ularning matematik kutilmasi va dispersiyasini aniqlash asosiy masalalardan biri hisoblanadi [2–5].

Faraz qilaylik,

$$S_\nu = X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu , \tag{1}$$

bu yerda $X_1, X_2, \cdots, X_\nu$ — bog‘liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar, ν ularga bog‘liq bo‘lmagan va $\{1,2,\ldots,n\}$ to‘plamdan qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor.

Teorema. Agar $X_1, X_2, \cdots, X_n$ bog‘liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo‘lsa, hamda ν ularga bog‘liqsiz bo‘lsa, u holda

$$ES_\nu = EX_1 \cdot E\nu \qquad (2)$$

va

$$DS_\nu = DX_1 \cdot E\nu + (EX_1)^2 \cdot D\nu \qquad (3)$$

Isbot. Shartli matematik kutilmadan foydalanamiz. $\nu = k$ bo‘lganda

$$S_\nu = X_1 + \cdots + X_k .$$

Shuning uchun

$$E(S_\nu \mid \nu = k) = kEX_1 .$$

Demak,

$$E(S_\nu \mid \nu) = \nu EX_1 . \qquad (4)$$

Endi iteratsiyalangan matematik kutilma formulasiga ko‘ra

$$ES_\nu = E(E(S_\nu \mid \nu)) = EX_1 \cdot E\nu .$$

Bu (2) formulani beradi.

Keyin

$$D(S_\nu \mid \nu = k) = kDX_1 ,$$

ya’ni

$$D(S_\nu \mid \nu) = \nu DX_1 . \qquad (5)$$

To‘liq dispersiya formulasidan

$$DS_\nu = E(D(S_\nu \mid \nu)) + D(E(S_\nu \mid \nu)). \qquad (6)$$

(4) va (5) ni (6) ga qo‘ysak,

$$DS_\nu = DX_1 \cdot E\nu + (EX_1)^2 D\nu .$$

Teorema isbotlandi.

Natija 1. (2) va (3) formulalardan

$$\frac{DS_\nu}{ES_\nu} = \frac{DX_1}{EX_1} + EX_1 \frac{D\nu}{E\nu} \qquad (7)$$

munosabat kelib chiqadi.

(7) formula tasodifiy yig‘indining o‘zgaruvchanligi ikki manba hisobiga shakllanishini ko‘rsatadi. Birinchi had qo‘shiluvchilarning ichki tasodifiyligini tavsiflasa, ikkinchi had indeksning tasodifiyligi ta’sirini ifodalaydi. Shu sababli,

indeks dispersiyasining ortishi yig‘indining umumiy dispersiyasiga bevosita ta’sir ko‘rsatadi.

Natija 2. Agar $\nu \sim Poisson(\lambda)$ bo’lsa [2-5], u holda

$$E\nu = D\nu = \lambda.$$

Shuning uchun (3) formuladan

$$DS_\nu = \lambda DX_1 + \lambda (EX_1)^2. \tag{8}$$

yoki

$$DS_\nu = \lambda E(X_1^2). \tag{9}$$

kelib chiqadi.

Haqiqatdan ham,

$$E(X_1^2) = DX_1 + (EX_1)^2.$$

Shunday qilib,

$$DS_\nu = \lambda E(X_1^2).$$

Bu tasodifiy yig‘indilar nazariyasida muhim xususiy hol hisoblanadi.

Belgilaymiz

$$I_X = \frac{DX_1}{EX_1}, \qquad I_\nu = \frac{D\nu}{E\nu}.$$

Bu ko‘rsatkichlar mos ravishda qo‘shiluvchilar va indeksning nisbiy o‘zgaruvchanligini tavsiflaydi.

U holda

$$\frac{DS_\nu}{ES_\nu} = I_X + EX_1 I_\nu. \tag{10}$$

Ushbu ishda tasodifiy indeksli yig‘indining matematik kutilmasi va dispersiyasi uchun aniq formulalar olindi. Shartli matematik kutilma va to‘liq dispersiya formulasidan foydalanib, yig‘indining asosiy moment xarakteristikalari keltirib chiqarildi. Puasson indeksli xususiy hol uchun dispersiyaning soddalashtirilgan ko‘rinishi hosil qilindi. Olingan natijalar sug‘urta risklari, navbatlar nazariyasi va tasodifiy jarayonlarni modellashtirish masalalarida qo‘llanilishi mumkin.

ADABIYOTLAR

1. Feller W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 1. Wiley, 1968.
2. Ross S.M. *Introduction to Probability Models*. Academic Press, 2014.
3. Gut A. *Stopped Random Walks*. Springer, 2009.
4. Gut A. *Probability: A Graduate Course*. Springer, 2013.
5. Resnick S.I. *A Probability Path*. Birkhäuser, 2019.