

РЕШЕНИЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ С ПОМОЩЬЮ РАССУЖДЕНИЯ

Мамура Исакова Самариддиновна,

Преподавательница физики в Академическом лицее при Самаркандском
ветеринарном медицинском институте.

Элмуродов Уткир Толибович,

Преподаватель физики в Академическом лицее при Самаркандском
ветеринарном медицинском институте.

Заррина Исакова Самариддиновна,

преподаватель общеобразовательной школы № 1 Самаркандского города.

АННОТАЦИЯ

На этой статье следующие задачи из отдела электростатик были решены с помощью рассуждения: Металлическое кольцо разорвалось кулоновскими силами, когда заряд кольца был равен Q . Сделали точно такое же новое кольцо, но из материала, прочность которого в 10 раз больше. Какой заряд разорвет новое кольцо? Определить заряд разорвет новое кольцо, сделанное из прежнего материала, если все размеры нового кольца в 10 раз больше размеров старого. В центр тонкого проволочного кольца радиусом R и зарядом q поместили точечный заряд q_0 . Определить приращение силы, растягивающей кольцо. Проверить возможность круговые движения с постоянной скоростью точечного электрического заряда вокруг неподвижного точечного электрического диполя. На оси тонкого равномерно заряженного кольца радиусом R находится неполярная молекула. Исследовать устойчивость положения молекулы в зависимости от ее расстояния до центра кольца. Этот метод на этих задачах дал хороший результат.

Ключевые слова. Электростатика, электрический заряд, точечный заряд, заряженное кольцо, сила взаимодействия, электрический диполь, Заряженное кольцо, Кулоновская сила, молекула.

ABSTRACT

In this article, the following problems from the department of electrostatics were solved using reasoning: A metal ring was torn apart by Coulomb forces when the charge of the ring was equal to Q . They made exactly the same new ring, but from a material whose strength was 10 times greater. What charge will break the new ring? Determine the charge that will break a new ring made of the same material if all dimensions of the new ring are 10 times larger than the dimensions of the old one. A

point charge q_0 was placed at the center of a thin wire ring with radius R and charge q . Determine the increment in the force that stretches the ring. Check the possibility of circular motion with a constant speed of a point electric charge around a fixed point electric dipole. A nonpolar molecule is located on the axis of a thin uniformly charged ring of radius R . Investigate the stability of the position of the molecule depending on its distance from the center of the ring. This method gave good results on these tasks.

Keywords. *Electrostatics, electric charge, point charge, charged ring, interaction force, electric dipole, Charged ring, Coulomb force, molecule.*

1.Разрыв кольца.

Металлическое кольцо разорвалось кулоновскими силами, когда заряд кольца был равен Q . Сделали точно такое же новое кольцо, но из материала, прочность которого в 10 раз больше. Какой заряд разорвет новое кольцо? Какой заряд разорвет новое кольцо, сделанное из прежнего материала, если все размеры нового кольца в 10 раз больше размеров старого?

Понятно, что разрыв кольца обусловлен кулоновским взаимодействием зарядов кольца. В предыдущих задачах, где участвовали точечные заряды, мы имели возможность на прямую воспользоваться законом Кулона, сформулированным именно для точечных зарядов. В данной же задаче у нас нет такой возможности, так как кольцо не является точкой.

Если бы перед нами стояла задача найти точное выражение для силы кулоновского взаимодействия, то схема действий была бы следующей.

Необходимо разбить кольцо на бесконечно малые элементы, которые можно считать точечными зарядами. За тем найти силу взаимодействия какого-либо бесконечно малого элемента одной половины кольца со всеми бесконечно малыми элементами другой половины кольца. И после этого проинтегрировать полученное выражение по всем элементам первой половины кольца с учетом того, что сила – это вектор. Таким образом, мы придем к некоторому двойному интегралу, взять который является достаточно трудной задачей.

Но, к счастью, нам не требуется знать точное выражение для силы взаимодействия зарядов кольца. Требуется определить только, что произойдет с силой взаимодействия при изменении каких-либо параметров задачи. Поэтому разумно воспользоваться методом анализа размерностей.

Из структуры закона Кулона видно, что размерность силы кулоновского взаимодействия пропорциональна размерности квадрата заряда и обратна размерности квадрата длины:

$$[F_k] \sim \frac{[Q^2]}{[R^2]}$$

В нашем случае Q – заряд кольца (только он один присутствует в задаче), R – некоторый характерный размер, не обязательно равный радиусу кольца. Откуда сразу видно, что для увеличения силы разрыва в 10 раз (так как прочность выросла в 10 раз) при сохранении размеров необходимо увеличить заряд в $\sqrt{10}$ раз. При увеличении же размеров кольца в 10 раз (но сохранении его материала) необходимо увеличить заряд уже в 100 раз. Связано это с тем, что, во-первых, возросли размеры и, во-вторых, выросла сила разрыва, пропорциональная площади сечения материала кольца, которая в свою очередь пропорциональна квадрату толщины кольца (толщина кольца также выросла!).

2. Заряд внутри кольца.

В центр тонкого проволочного кольца радиусом R и зарядом q поместили точечный заряд q_0 . Каково приращение силы, растягивающей кольцо?

В отличие от задачи 1. здесь вообще не ставится вопрос о силе растяжения кольца, с которой, как мы убедились, связано множество чисто технических проблем. Здесь нужно только сравнить силы растяжения кольца без заряда внутри и с зарядом. Поэтому выделим бесконечно малый элемент кольца, видимый из его центра под углом $\delta\alpha$, и сравним силы, действующие на выбранный элемент в двух случаях. На рис. 1, *а* обозначено: T – сила натяжения кольца, уравновешенная силой кулоновского взаимодействия δF_k выделенного элемента кольца со всеми остальными элементами.

Рис. 1, *б* отличается тем, что внутри кольца появился заряд q_0 , который добавил к прежней кулоновской силе значение $\delta F'_k$, что привело к увеличению силы натяжения на ΔT .

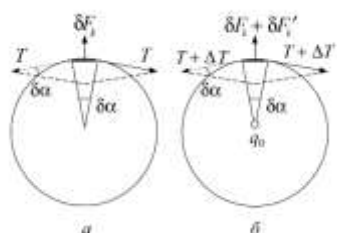


Рис. 1.

Из условия равновесия элемента кольца в обоих случаях следует

$$T\delta\alpha = \delta F_k, \quad (1)$$

$$(T + \Delta T)\delta\alpha = \delta F_k + \delta F'_k. \quad (2)$$

Значение $\delta F'_k$ нетрудно найти из закона Кулона:

$$\delta\sqrt{-k}^1 = \frac{q_0\delta q}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad (3)$$

где δq – заряд бесконечно малого элемента кольца, равный $\frac{q\delta\alpha}{2\pi}$. Из соотношений (1)–(3) находим

$$\Delta T = \frac{q_0 q}{8\pi^2 \epsilon_0 R^2}.$$

3. Движение заряда в поле диполя.

Возможны ли круговые движения с постоянной скоростью точечного электрического заряда вокруг неподвижного точечного электрического диполя?

Заданный в задаче вопрос можно поставить иначе: существует ли такое геометрическое место точек в поле диполя, для которого вектор $\underline{E}$ направлен перпендикулярно оси диполя, сохраняясь постоянным по величине? Обратимся к картине силовых линий электрического поля диполя (рис. 2.),

из которой хорошо видно, что такое геометрическое место точек существует и им является окружность, перпендикулярная оси диполя и проходящая, например, через точки А и В. Для определения положения этой окружности воспользуемся выражением для напряженности электрического поля диполя,

$$E = \frac{kp}{r^2} \sqrt{1 + 3\theta}$$

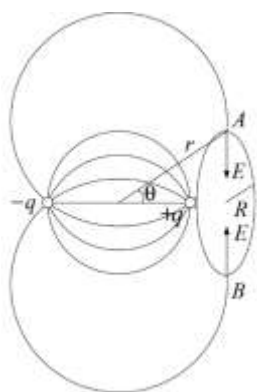


Рис.2.

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^5} - \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1)$$

Так как вектор $\vec{E}$ должен смотреть перпендикулярно оси диполя, т.е. перпендикулярно вектору $\vec{p}$, то для любых точек искомой окружности должно выполняться условие $\vec{E}\vec{p} = 0$. Поэтому помножим скалярно выражение (1) на вектор $\vec{p}$ и приравняем произведение нулю. Тогда приходим к уравнению

$$\frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$$

После раскрытия скалярного произведения $\vec{p}\vec{r}$ получаем

$$3\theta = 1 \rightarrow \cos \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Откуда следует, что круговые движения точечного заряда в поле диполя возможны на любом расстоянии от диполя. Плоскость круговой орбиты заряда перпендикулярна к оси диполя, а угол α между направлением дипольного момента и радиус-вектором, проведенным от диполя к движущемуся заряду, определяется выражением

$$\cos \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (2)$$

где знак минус относится к положительному заряду, а плюс к отрицательному. Найдем теперь скорость этого заряда. Так как движение происходит по окружности радиуса $R = r \sin \theta$, то для заряда второй закон Ньютона будет выглядеть как

$$\frac{mv^2}{R} = QE \quad (3)$$

где Q – величина заряда; m – его масса; значение E определяется выражением

$$E = \frac{kp}{r^2} \sqrt{1 + 3\theta}$$

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\theta}$$

С учетом условия (2) напряженность электрического поля

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{2} \quad (4)$$

а радиус окружности

$$R = r \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (5)$$

После подстановки выражений (4) и (5) в (3) находим

$$v^2 = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 m r^2} \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{pQ}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 m h^2}$$

где h – расстояние от диполя до центра окружности, по которой вращается точечный заряд.

4. Заряженное кольцо и неполярная молекула.

На оси тонкого равномерно заряженного кольца радиусом R находится неполярная молекула. Исследовать устойчивость положения молекулы в зависимости от ее расстояния до центра кольца.

Как отмечалось в предыдущей задаче, неполярная молекула, попав в электрическое поле, приобретает дипольный момент $\vec{p} = \beta\epsilon_0\vec{E}$, где β – поляризуемость молекулы. В этом случае на нее начинает действовать сила

$$F = p \frac{\partial E}{\partial x}$$

где производная $\frac{\partial E}{\partial x}$ берется в направлении вдоль силовой линии. Подставляя сюда выражение для дипольного момента, получаем

$$F(x) = \frac{1}{2} \beta\epsilon_0 \frac{\partial E^2(x)}{\partial x} \quad (1)$$

где $E(x)$ определяется распределением напряженности электрического поля вблизи молекулы.

В нашем случае электрическое поле создано на оси тонкого равномерно заряженного кольца. Рассчитаем это поле. В силу симметрии задачи очевидно

$$E = \oint dE_{\parallel}$$

где $dE_{\parallel}$ – проекция вектора $d\vec{E}$, созданного бесконечно малым элементом кольца на направлении оси кольца (рис.3.),

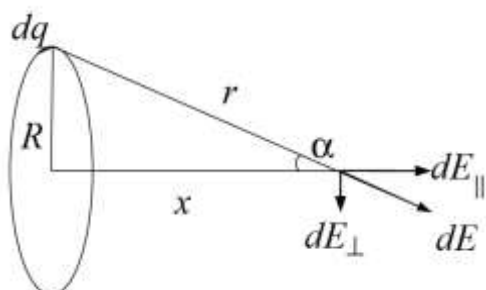


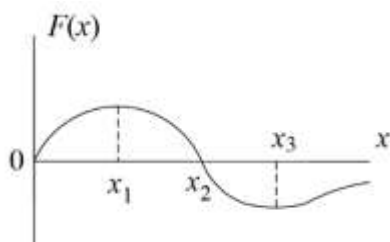
Рис.3.

$$dE_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \cos \alpha \quad (2)$$

(интеграл по векторам $d\vec{E}_{\perp}$ будет равен нулю). Интегрируя выражение (2), получаем

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Подставляя это выражение в (1) и вычислив производную, находим зависимость силы, действующей на неполярную молекулу, от ее расстояния до центра кольца x :



$$F(x) = \frac{\beta q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{x(R^2 - 2x^2)}{(R^2 + x^2)^4}$$

Воспользовавшись стандартными методами исследования функций, отобразим график этой функции на рис. 4.

Рис.4.

Здесь обозначено $x_1 = 0,29R$, $x_2 = R/\sqrt{2}$, $x_3 = 1,1R$. На участке $0 \leq x < x_2$ возникает отталкивание молекулы, при $x > x_2$ – притяжение. И хотя в точке $x = 0$ значение силы равно нулю (как и в точке x_2), это положение не является устойчивым, так как при любом малом отклонении от него появляется сила отталкивания. Поэтому устойчивым положением равновесия является только точка $x_2 = R/\sqrt{2}$.

REFERENCES

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учеб. пособие: в 5 т. – Т. 3: Электричество. – М.: Наука, 1983. – 688 с.
2. Иродов И.Е. Задачи по общей физике: учеб. пособие для вузов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 432 с.
3. Задачи по физике: учеб. пособие / И.И. Воробьев [и др.]; под ред. О.Я. Савченко. – М.: Наука, 1988. – 416 с.
4. Сборник задач по общему курсу физики: учеб. пособие для вузов: в 3 ч. Ч. 2: Электричество и магнетизм. Оптика / под ред. В.А. Овчинкина. – М.: Изд-во МФТИ, 2000. – 368 с.
5. Иродов И.Е. Электромагнетизм. – 5-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 320 с.
6. Паршаков А.Н. Принципы и практика решения задач по общей физике. Часть 2. Электромагнетизм. / под ред. Н.В. Бабинова. - П: Изд-во ПГТУ, 2010. – 9-21 стр,