

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВОДНЫХ РЕСУРСОВ В КАНАЛАХ ИРРИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

**Хайдарова Р.Д.¹, Ҳазратов М.А.². Акромов Ф.О.³. Шаймарданов С.Қ.⁴.
Авезова М. Б.⁵**

¹Термизский государственный университет, Термиз

^{2,3, 4, 5}Исследователь

АННОТАЦИЯ

В статье приведены необходимые условия оптимальности задачи оптимального распределения воды в каналах ирригационных систем в условиях дискретности водоподачи в случае использования в качестве математической модели неустановившегося движения воды на участках канала упрощенных уравнений движения воды: уравнения прямой, кинематической и конвекционно-диффузной волн. Приведено аналитическое решение задачи оптимального распределения воды в случае использования уравнения прямой волны.

Ключевые слова: водных ресурсов, канал, Конвекционно-диффузная модель.

ABSTRACT

The article presents the necessary conditions for the optimality of the problem of optimal distribution of water in the channels of irrigation systems under conditions of discreteness of water supply in the case of using simplified equations of water movement as a mathematical model of unsteady water movement in the sections of the channel: equations of direct, kinematic and convection-diffuse waves. An analytical solution to the problem of optimal distribution of water is given in the case of using the direct wave equation.

Key words: water resources, channel, Convection-diffusion model.

ВВЕДЕНИЕ

В статье приведены необходимые условия оптимальности задачи оптимального распределения воды в каналах ирригационных систем в условиях дискретности водоподачи в случае использования в качестве математической модели неустановившегося движения воды на участках канала упрощенных уравнений движения воды: уравнения прямой, кинематической и конвекционно-диффузной волн. Приведено аналитическое решение задачи оптимального распределения воды в случае использования уравнения прямой волны.

ОБСУЖДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Учет условия дискретности водоподачи потребителям влияет на отдельные составляющие уравнений движения потока, т.е. параметры уравнений терпят разрывы не только по пространственным параметрам, но и по времени. В правых частях этих уравнений функции имеют дискретный характер по времени, а коэффициенты в дифференциальных уравнениях неразрывности и количества движения для систем с распределёнными параметрами уже не являются непрерывными функциями по времени, поэтому при движении потока в каналах возникают волновые явления.

Современная теория оптимального распределения воды в ирригационных системах, основанная на дифференцируемости коэффициентов уравнений движения воды в ирригационных системах и их правых частей, не позволяет сформулировать необходимые условия оптимальности по выбранному критерию распределения воды между водопотребителями в условиях дискретности водоподачи [1-2].

Эти особенности функций и уравнений были учтены при разработке необходимых условий оптимальности по выбранным критериям распределения воды между водопотребителями в условиях дискретности водоподачи.

Оптимальное распределение воды в каналах ирригационных систем в условиях дискретности водоподачи водопотребителям формулируется как задача оптимального управления системами с распределёнными параметрами [3-4], которая учитывает все эти особенности по выбранным критериям распределения воды.

Рассмотрим одномерный объект с распределёнными параметрами, который описывается одномерными дифференциальными уравнениями первого порядка по времени и второго порядка по пространственной переменной

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = f\left(Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, u\right), \quad 0 < x < l; \quad 0 < t < T; \quad (1)$$

где $K(x, t)$ – распределённое состояние объектов, $u(x, t)$ – распределённое управление, f – известная функция, дифференцируемая по совокупности аргументов.

Граничные условия объектов запишутся следующим образом

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(0, t) = g_1(Q(0, t), v_1(t)), \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(l, t) = g_2(Q(l, t), v_2(t)), \quad (3)$$

где $\vartheta_1(m)$ – граничное управляющее воздействия, приложенное в точке $x=0$, $\vartheta_2(m)$ – граничное управляющее воздействия, приложенное в точке $x=l$; z_1, z_2 – известные функции, дифференцируемые по совокупности аргументов.

Начальные условия объектов задаются следующим образом

$$Q(x,0)=Q_0(x), \quad (4)$$

где $K_0(x)$ – известная заданная функция.

В условиях дискретности водоподачи управляющие функции имеют вид

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K u_{ik} \delta(x-a_i) 1(t-t_k), \quad v_1(t)=\sum_{k=1}^K v_k^1 1(t-t_{k1}), \quad v_2(t)=\sum_{k=1}^K v_k^2 1(t-t_{k2}), \quad (5)$$

где u_{ik} , v_k^1 и v_k^2 дискретные значения управляющих воздействий в моменты времени m_k , m_{k1} и m_{k2} . $\delta(x-a_i)$ – дельта функция Дирака по x , и $1(m_{ki})$ – единичные функции по времени m .

Критерий оптимального управления рассматриваемого объекта характеризуется следующим функционалом качества

$$I(u(x,t), v_1(t), v_2(t), Q_0(x)) = \int_0^{l_1} \int_0^T G \left(Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, u \right) dx dt + \\ + \int_0^{l_1} G_0(Q(x,T), Q_0(x)) dx + \int_0^T [G_1(Q(0,t), v_1(t)) + G_2(Q(l,t), v_2(t))] dt, \quad (6)$$

где G , G_0 , G_1 , G_2 – известные функции, дифференцируемые по совокупности аргументов.

Ограничения на управления имеют следующий вид

$$u_* \leq u(x,t) \leq u^*, \quad v_{1*} \leq v_1(t) \leq v_{1*}^*, \quad v_{2*} \leq v_2(t) \leq v_{2*}^*, \quad Q_* \leq Q_0(x) \leq Q^*, \quad (7)$$

где u^* , u_* , v_{1*}^* , v_{1*} , v_{2*}^* , v_{2*} , Q^* , Q_* – заданные максимальные и минимальные значения управляющих функций.

Вводя гамильтониан с помощью сопряженной функции

$$X = G + \lambda \phi, \quad (8)$$

на основе методов вариационного исчисления и множителей Лагранжа получим явные виды выражения для вариации функционала в окрестности оптимальной траектории

$$\delta I = \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_0 \delta u dx dt + \int_0^l \left[\left(\frac{\partial G_1}{\partial Q_0(x)} + \lambda \right) \delta Q_0(x) \right] dx + \\ + \int_0^T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial Q} \right)_0(0,t) \left(\frac{\partial g_1}{\partial v_1(t)} \right)_0 \delta v_1(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \right)_0(l,t) \left(\frac{\partial g_2}{\partial v_2(t)} \right)_0 \delta v_2(t) \right] dt \quad (9)$$

При этом сопряженная функция удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = - \left[\left(\frac{\partial H}{\partial Q} \right)_0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial Q'} \right)_0 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial H}{\partial Q''} \right)_0 \right], \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\left(\frac{\partial G_1}{\partial Q(0,t)} \right)_0 - \left(\frac{\partial H}{\partial Q''}(0,t) \right)_0 \left(\frac{\partial g_1}{\partial Q(0,t)} \right)_0 - \left(\frac{\partial H}{\partial Q'}(0,t) \right)_0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial Q''}(0,t) \right)_0 = 0, \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial G_2}{\partial Q(l,t)} \right)_0 - \left(\frac{\partial H}{\partial Q''}(l,t) \right)_0 \left(\frac{\partial g_2}{\partial Q(l,t)} \right)_0 - \left(\frac{\partial H}{\partial Q'}(l,t) \right)_0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial Q''}(l,t) \right)_0 = 0, \quad (12)$$

условиями в конечный момент времени

$$\lambda(x,T) = \left(\frac{\partial G_0}{\partial Q(x,T)} \right)_0, \quad (13)$$

где символ $()_0$ означает, что соответствующая величина вычислена вдоль оптимальной траектории, $K_{u'}^b = \partial K_u / \partial x_u$, $K_{u''}^b = \partial^2 K_u / \partial x_u^2$.

В (9) влияние вариаций δu , δv_1 , δv_2 и δK_0 на вариации δI выражена явным образом.

Далее, приравнявая коэффициенты при вариациях по управлению нулю, в выражении вариации функционала получим остальные необходимые условия оптимальности рассмотренной задачи

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial G_1}{\partial Q_0(x)} + \lambda \right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial Q''}(0,t) \right)_0 \left(\frac{\partial g_1}{\partial v_1(t)} \right)_0 = 0, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial Q''}(l,t) \right)_0 \left(\frac{\partial g_2}{\partial v_2(t)} \right)_0 = 0.$$

Таким образом, необходимые условия оптимальности задачи (1-6) определяются условиями приведенные в (10 – 14).

Рассмотрим необходимые условия оптимальности распределения воды в каналах ирригационных систем в условиях дискретности водоподачи при использовании упрощенных моделей движения воды на участках канала.

Модель прямой волны. Задача оптимального распределения воды в условиях прямой волны является минимизации колебания расхода воды по длине и в конце канала при обеспечении дискретной водоподачи заданного расхода воды к соответствующим боковым водозаборам, т.е.

$$I = \int_0^l [Q(x,T) - Q^*]^2 dx + \int_0^T Q^2(l,t) dt, \quad (15)$$

Модель прямой волны имеет следующее уравнение в частных производных

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + v \frac{\partial Q}{\partial x} = q, \quad (16)$$

где $K(x, m)$ – расход воды по длине канала, $q(x, m)$ – интенсивность боковых водозаборов, в случае дискретности водоподачи в пять сосредоточенных водозаборов, расположенных в точках a_i , имеет вид

$$q(x, t) = -\sum_{i=1}^5 q_i \delta(x - a_i) 1(t - T). \quad (17)$$

Начальные, граничные условия и области определения переменных

$$Q(x, 0) = Q_0(x), \quad Q(0, t) = u(t), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad v > 0. \quad (18)$$

В данном случае, вводя сопряженную функцию $\lambda(x, m)$, приведем выражения для вариации функционала в окрестности оптимальной траектории без промежуточных преобразований

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} - v \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \delta Q dx dt + \int_0^l \left\{ 2[Q(x, T) - Q^*] + \lambda(x, T) \right\}_0 \delta Q(x, T) dx + \\ & + \int_0^T \left\{ [2Q(l, t) + v \lambda(l, t)]_0 \delta Q(l, t) - v \lambda(0, t)_0 \delta u(t) \right\} dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда необходимые условия оптимальности данной задачи имеют вид

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} - v \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \quad \lambda(x, T) = -2[Q(x, T) - Q^*], \quad \lambda(l, t) = \frac{2}{v} Q(l, t), \quad \lambda(0, t) = 0. \quad (20)$$

Аналитическое решение краевых задач (16)-(18) и (19) на основе их функции Грина согласно [5] запишутся следующим образом

$$Q(x, t) = \int_0^t \int_0^l G_1(x, \xi, t - \tau) w_1(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (21)$$

$$\lambda(x, t) = \int_0^t \int_0^l G_2(x, \xi, t - \tau) w_2(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (22)$$

где $G_1(x, \xi, m - \tau)$ и $G_2(x, \xi, m - \tau)$, $w_1(x, m)$ и $w_2(x, m)$ – функции Грина и стандартизирующие функции, которые имеют вид

$$G_1(x, \xi, t - \tau) = 1(x - \xi) \delta(v(t - \tau) - (x - \xi)),$$

$$G_2(x, \xi, t - \tau) = 1(x - \xi) \delta(-v(t - \tau) - (x - \xi)),$$

$$w_1(x, m) = q(x, m) + K_0(x) \delta(m) - v y(m) \delta(x),$$

$$w_2(x, m) = [2K(x, T) - K^*] \delta(m - T) - 2/v K(l, m) \delta(x - l).$$

С помощью фундаментальных решений основных и сопряженных уравнений при $K_0(x) = 0$, рассматривая функцию $y(m)$ в виде ступенчатой

функции и на основе необходимых условий оптимальности, минимум функционала достигается при управлении

$$u_1(t) = \sum_{i=1}^5 q_{5-i} 1(t - \sum_{k=1}^i \tau_{5-k}), \quad (23)$$

где $\tau_u = (a_u - a_{u-1})/\nu$.

При этом решение уравнения (17) запишется в аналитическом виде

$$Q(x, t) = -\sum_{i=1}^5 q_i 1(x - a_i) 1(\nu(t - T) - (x - a_i)) + 1(t - \nu x) \sum_{i=1}^5 q_{5-i} 1(t - \sum_{k=1}^i \tau_{5-k}) \quad (24)$$

Физический смысл данного решения заключается в том, чтобы обеспечить изменения расходов воды в боковых водозаборах в разных створах канала, необходимо заранее изменить расход воды в начале участка. На рис. 1 в нижнем графике показан графический вид функции (25).

Из рисунка видно, что управление $y(m)$, т.е. расход в начале канала в момент времени $m_0 = T - \tau_5 - \tau_4 - \tau_3 - \tau_2 - \tau_1$ устанавливается равным заданному значению расхода воды водозабора в конце канала q_5 . Далее, после прохождения времени τ_5 , значение управления увеличивается на q_4 , через время τ_4 управление увеличивается на q_4 , через время τ_3 управление увеличивается на q_3 и так далее до значения q_1 , т.е. при оптимальном распределении воды в условиях дискретной водоподачи в канале в первую очередь обеспечиваются водозаборы, расположенные последовательно с конца канала.

На рис. 2 приведена функция распределения расхода воды $K(x, m)$ (24) в изометрии.

Модель кинематической волны. Критерий оптимального распределения воды в условиях модели кинематической волны имеет такой же вид как (15).

Модель кинематической волны основывается на уравнение разрывности потока [2,7]

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q, \quad (25)$$

$$Q = \omega C \sqrt{Ri}, \quad C = \frac{1}{n} R^y, \quad y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0,1),$$

где $K(x, m)$ – изменение расхода воды на участке канала, ω – площадь живого сечения потока, P – гидравлический радиус потока, C – коэффициент Шези, n – коэффициент шероховатости, i – уклон дна.

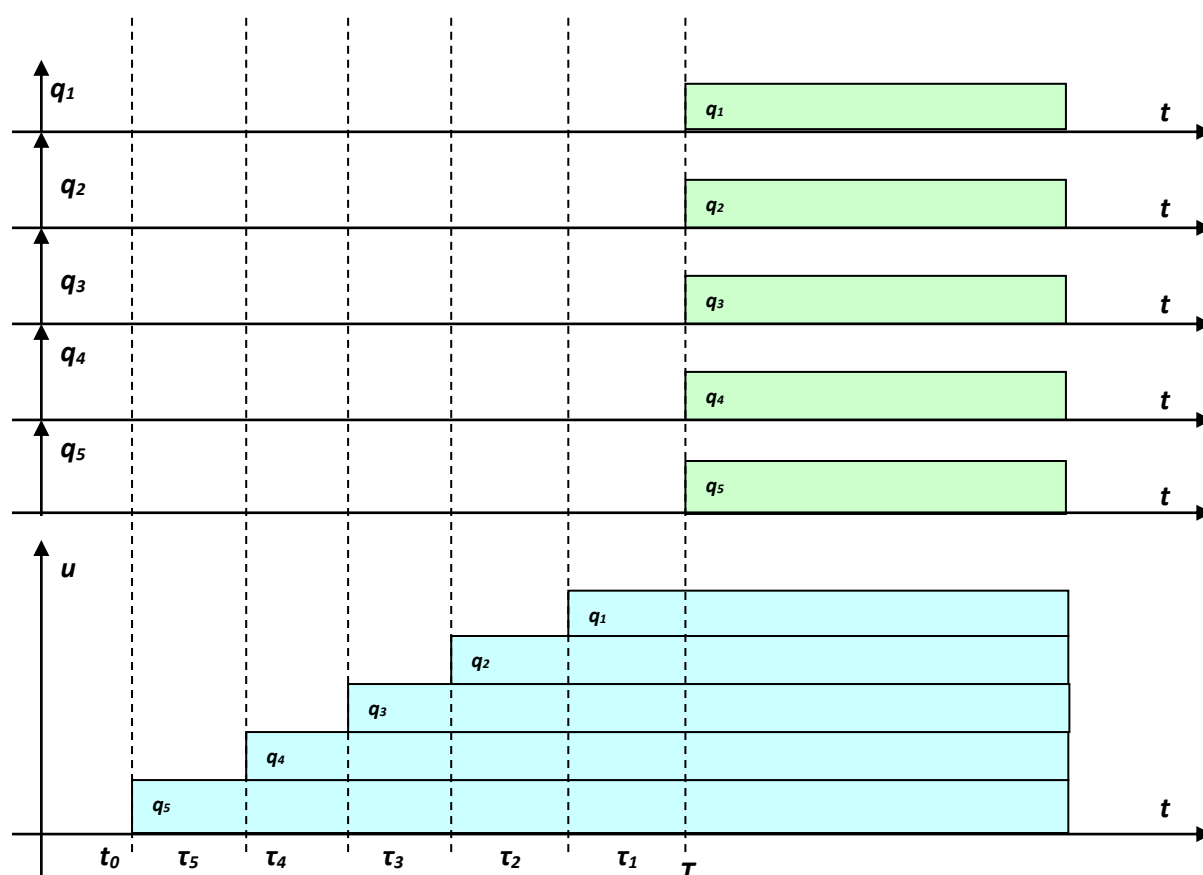


Рис. 1. Изменение расхода воды в начале канала, обеспечивающее оптимальное распределение воды на участке канала

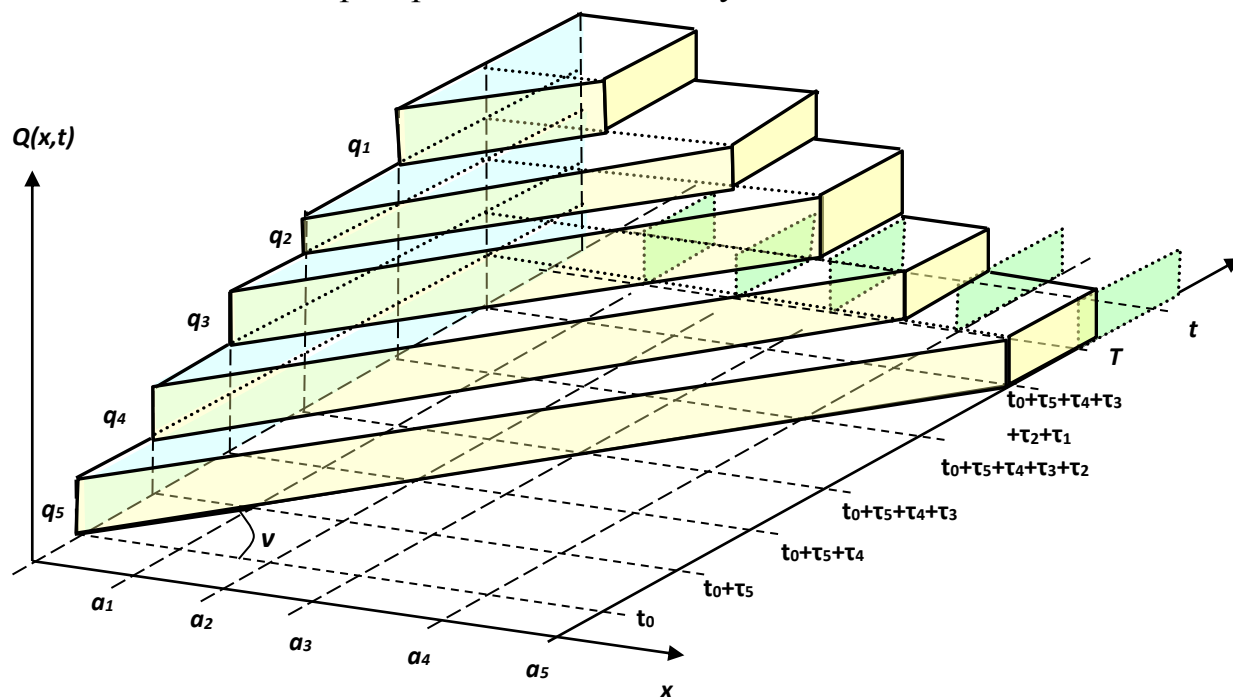


Рис. 2. Изменение расхода воды в начале канала, обеспечивающее оптимальное распределение воды на участке канала

Начальные условия

$$Q(x,0) = Q_0(x), \quad \omega(x,0) = \omega_0(x), \quad (26)$$

где $Q_0(x)$ и $\omega_0(x)$ – начальные распределения расхода и живого сечения водного потока.

Граничное условие и области определения переменных аналогичны предыдущей задаче.

Расходы воды в точках водозабора участка канала $q(x,t)$ в условиях дискретности распределения воды определяются как в (17)

Аналогично определяются необходимые условия оптимальности как

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} - \nu \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \quad \lambda(x,T) = -2[Q(x,T) - Q^*], \quad \lambda(l,t) = \frac{2}{\nu} Q(l,t), \quad \lambda(0,t) = 0. \quad (27)$$

где $\nu = \left(\frac{\partial Q}{\partial \omega} \right)_0$.

В случае модели кинематической волны уравнения для основных переменных являются нелинейными, а уравнение для сопряженных переменных являются линейными уравнениями гиперболического типа обратной волны. Скорость обратной волны определяется как производная расхода воды по площади сечения потока и является переменной функцией. Граничные и конечные условия для сопряженной переменной аналогичны как для модели прямой волны.

Конвекционно-диффузная модель. Критерий оптимального распределения воды в условиях конвекционно-диффузной модели имеет вид как (15)

Конвекционно-диффузная модель основывается на учете силы сопротивления и пренебрежении силы инерции [2]

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = f \left(Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, q \right), \quad (28)$$

где $f = - \left(\frac{\partial Q}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial h} \right) \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{K^2}{2B|Q|} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + q,$

K – модуль расхода, B – ширина потока по верху.

Модуль расхода K характеризует величину сил трения и определяется по следующей формуле

$$K = \omega \cdot C \sqrt{R}. \quad (30)$$

Остальные параметры, начальные и граничные условия, а также области определения переменных имеют такой же вид как в модели кинематической волны.

На основе вышеприведенной методики определены необходимые условия оптимальности в случае конвекционно-диффузной модели

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} - v_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x} - v_2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} = 0, \quad (31)$$

$$\text{где } v_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial Q'} \right)_o = \left(\frac{\partial Q}{\partial K'} \frac{\partial K}{\partial h} \right)_o, \quad v_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial Q''} \right)_o = \left(\frac{K^2}{2B|Q|} \right)_o. \quad (32)$$

Граничные условия

$$v_2 \frac{\partial \lambda}{\partial x}(0, t) = (v_2 - v_1) \lambda(0, t) \quad v_2 \frac{\partial \lambda}{\partial x}(l, t) = (v_1 - v_2) \lambda(l, t) \quad (33)$$

условия к концу процесса $\lambda(x, T) = -2[Q(x, T) - Q^*]$.

В случае конвекционно-диффузной модели уравнение (29) для основной переменной является нелинейным, а уравнение (31) для сопряженных переменных является линейным уравнением параболического типа с конвективным членом. Коэффициенты определяются как производные функции в правой части уравнения (32), соответственно, по K и Q являются переменными функциями. Граничные условия имеют вид третьего рода. Конечное условие для сопряженной функции аналогично модели кинематической волны. В случаях моделей кинематической и конвективно-диффузионной волны оптимальное управление может быть определено на основе численных методов моделирования движения воды в каналах [6, 7] и необходимых условия оптимальности для приближенного решения задач оптимального распределения воды в условиях дискретности водоподачи.

REFERENCES

1. Натальчук М.Ф., Ахмедов Х.А., Ольгаренко В.И. Эксплуатация гидромелиоративных систем. – М.: Колос, 1983. – 279 с.
2. Грушевский М.С. Неустановившееся движение воды в реках и каналах. – Л.: Гидрометеиздат. 1982. – 288 с.
3. Рей У. Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983. – 245 с.
4. Серазетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука 1977. – 480 с.

-
5. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука 1979. – 225 с.
 6. Кюнж Ж.А., Холли Ф.М., Вервей А. Численные методы в задачах речной гидравлики. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 253 с.
 7. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. – 499 с.