Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences
Research BIB / Index Copernicus
(E)ISSN: 2181-1784
6(3), 2026
www.oriens.uz

NOLINEAR DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA ULARNING DINAMIK TIZIMLARDAGI ROLI

Jonqobilov J.T.
Olmaliq davlat texnika institute
"Matematika va tabiiy fanlar " kafedrasi assistenti
jonqobilovjaxongir70@gmail.com

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada nolinear differensial tenglamalar nazariyasi, ularning xususiyatlari va dinamik tizimlarni modellashtirishdagi ahamiyati tahlil qilinadi. Barqarorlik nazariyasi, bifurkatsiya hodisalari hamda xaos nazariyasiga oid asosiy tushunchalar koʻrib chiqiladi. Shuningdek, real jarayonlarni modellashtirishda nolinear tenglamalarning ustunliklari yoritiladi. Tadqiqot natijalari shuni koʻrsatadiki, nolinear differensial tenglamalar real jarayonlarni aniqroq ifodalash imkonini beruvchi kuchli matematik apparat hisoblanadi. Ularning chuqur oʻrganilishi nafaqat nazariy matematika, balki amaliy muammolarni hal etishda ham muhim ahamiyat kasb etadi.

Kalit soʻzlar: *Nolinear differensial tenglama, dinamik tizim, barqarorlik, bifurkatsiya, xaos, Lyapunov funksiyasi.*

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассматриваются теория нелинейных дифференциальных уравнений, их свойства и значение в моделировании динамических систем.Анализируются основные понятия теории устойчивости, явления бифуркации и элементы теории хаоса. Также освещаются преимущества использования нелинейных уравнений при моделировании реальных процессов.Результаты исследования показывают, что нелинейные дифференциальные уравнения являются мощным математическим аппаратом, позволяющим более точно описывать реальные процессы. Их углублённое изучение имеет важное значение не только для теоретической математики, но и для решения прикладных задач.

Ключевые слова: *нелинейное дифференциальное уравнение, динамическая система, устойчивость, бифуркация, хаос, функция Ляпунова.*

ABSTRACT

This article examines the theory of nonlinear differential equations, their properties, and their significance in modeling dynamic systems. The main concepts of stability theory, bifurcation phenomena, and elements of chaos theory are analyzed.

In addition, the advantages of usingnonlinear equations in modeling real-world processes are highlighted.

The results of the study show that nonlinear differential equations represent a powerful mathematical tool that allows for a more accurate description of real processes. Their in-depth study is important not only for theoretical mathematics but also for solving practical problems.

Keywords: *nonlinear differential equation, dynamical system, stability, bifurcation, chaos, Lyapunov function.*

KIRISH

Zamonaviy matematika va tabiiy fanlar rivojida differensial tenglamalar muhim nazariy va amaliy vosita sifatida alohida oʻrin egallaydi. Ayniqsa, nolinear differensial tenglamalar real jarayonlarni modellashtirishda yuqori aniqlik va moslashuvchanlikni ta’minlaydi. Tabiatda uchraydigan koʻplab hodisalar – suyuqliklar harakati, iqlim oʻzgarishi, biologik populyatsiyalar dinamikasi, iqtisodiy tizimlar va texnik jarayonlar – oʻzining nolinear xususiyatlari bilan ajralib turadi. Shu sababli, ularni tahlil qilishda chiziqli modellardan foydalanish koʻpincha yetarli natija bermaydi. Nolinear differensial tenglamalar nazariyasi XX asrning ikkinchi yarmidan boshlab jadal rivojlanib, hozirgi kunda dinamik tizimlar nazariyasining asosiy yoʻnalishlaridan biriga aylandi. Ushbu yoʻnalish murakkab tizimlarning vaqt boʻyicha rivojlanishini oʻrganish, ularning barqarorligini aniqlash hamda uzoq muddatli xatti-harakatlarini bashorat qilish imkonini beradi. Ayniqsa, kichik oʻzgarishlarning katta natijalarga olib kelishi, ya’ni sezgirlik xususiyati nolinear tizimlarning eng muhim belgilaridan biri hisoblanadi.Mazkur sohada barqarorlik nazariyasi muhim oʻrin tutadi. Lyapunov usullari yordamida tizimlarning barqaror yoki nobarqaror holatlari aniqlanadi. Bundan tashqari, parametrlarning oʻzgarishi natijasida yuzaga keladigan bifurkatsiya hodisalari tizimning sifat jihatdan yangi holatlarga oʻtishini ifodalaydi. Bu esa real jarayonlarda keskin oʻzgarishlarning matematik asoslarini tushuntirishga yordam beradi.Shuningdek, nolinear tizimlarda kuzatiladigan xaotik harakatlar ham alohida ilmiy qiziqish uygʻotadi. Deterministik tenglamalar bilan ifodalangan boʻlsa-da, bunday tizimlar tartibsiz va oldindan aniq bashorat qilib boʻlmaydigan natijalarni berishi mumkin. Bu holat ilm-fanda “xaos nazariyasi” sifatida keng oʻrganilmoqda va u koʻplab sohalarda, jumladan meteorologiya, fizika va biologiyada qoʻllanilmoqda.Ushbu maqolaning maqsadi — nolinear differensial tenglamalarning asosiy nazariy jihatlarini tahlil qilish, ularning dinamik tizimlarni modellashtirishdagi oʻrnini ochib berish hamda amaliy qoʻllanilish imkoniyatlarini koʻrsatishdan iborat. Tadqiqot davomida zamonaviy matematik usullar asosida nolinear tizimlarning xatti-harakati o‘rganilib, ularning ilmiy va amaliy ahamiyati asoslab beriladi.

ASOSIY QISM

1. Nolinear differensial tenglamalar tushunchasi va xususiyatlari.Nolinear differensial tenglamalar — noma’lum funksiya yoki uning hosilalari chiziqli bo‘lmagan ko‘rinishda qatnashadigan tenglamalardir. Umumiy ko‘rinishi quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t)$$

bu yerda $f(y,t)$ — nolinear funksiya.

Nolinear tenglamalarning asosiy xususiyatlari quyidagilardan iborat:

- yechimlarning yagona bo‘lmasligi;
- kichik o‘zgarishlarga yuqori sezgirlik;
- analitik yechimlarning har doim ham mavjud emasligi;
- murakkab dinamik xatti-harakatlarning yuzaga kelishi.

Misol 1:

$$\frac{dy}{dt} = y^2$$

Bu tenglama ajraluvchi o‘zgaruvchilar usuli bilan yechiladi:

$$\frac{dy}{y^2} = dt$$

Integrallab:

$$-\frac{1}{y} = t + C$$

Demak, yechim:

$$y = -\frac{1}{t + C}$$

Bu yerda yechimning cheklangan vaqt ichida cheksizlikka intilishi (blow-up) kuzatiladi.

2. Dinamik tizimlar va faza tekisligi tahlili

Ko‘p o‘zgaruvchili nolinear tizimlar quyidagi ko‘rinishda beriladi:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

Bunday tizimlarni o‘rganishda **faza tekisligi** tushunchasi muhim ahamiyatga ega. Har bir nuqta tizim holatini ifodalaydi, trayektoriyalar esa vaqt bo‘yicha rivojlanishni ko‘rsatadi.

Misol 2 (Lotka–Volterra modeli):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

Bu model yirtqich va o‘lja populyatsiyalarining o‘zaro ta’sirini ifodalaydi. Tizim yechimlari odatda yopiq trayektoriyalar bo‘lib, populyatsiyalar davriy o‘zgaradi.

3. Barqarorlik nazariyasi va Lyapunov usuli

Dinamik tizimning muvozanat nuqtasi barqaror bo‘lishi uchun kichik og‘ishlar vaqt o‘tishi bilan kamayishi kerak.

Lyapunov funksiyasi V(x) quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$V(x) > 0, \frac{dV}{dt} < 0$$

Misol 3:

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt}} = -\boldsymbol{x}^3$$

Lyapunov funksiya sifatida:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Hosila

$$\frac{dV}{dt} = x \cdot (-x^3) = -x^4 < 0$$

Demak, tizimning muvozanat nuqtasi $x = 0$ **barqaror** hisoblanadi.

4. Bifurkatsiya hodisalari

Bifurkatsiya — bu tizim parametrlarining o‘zgarishi natijasida sifat jihatdan yangi holatlarning paydo bo‘lishidir.

Misol 4:

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^3$$

Muvozanat nuqtalar:

$$x(r - x^2) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{r}$$

- Agar $r<0$ bo‘lsa → faqat bitta muvozanat nuqta mavjud
- Agar $r>0$ bo‘lsa → uchta muvozanat nuqta paydo bo‘ladi

Bu hodisa **pitchfork bifurkatsiya** deb ataladi.

5. Xaos nazariyasi va nolinear tizimlar

Nolinear tizimlarda deterministik bo‘lsa ham tartibsiz harakat kuzatilishi mumkin. Bu **xaos** deb ataladi.

Misol 5 (logistik akslantirish):

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- $0<r<3$ → barqaror holat
- $3<r<3.57$ → davriy tebranishlar
- $r>3.57$ → xaotik harakat

Bu model biologik populyatsiyalarni o‘rganishda keng qo‘llaniladi.

XULOSA

Ushbu maqolada nolinear differensial tenglamalar nazariyasining asosiy jihatlari, ularning matematik xususiyatlari hamda dinamik tizimlarni modellashtirishdagi o‘rni keng qamrovda tahlil qilindi. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, nolinear tenglamalar real jarayonlarni ifodalashda chiziqli modellarga nisbatan ancha samarali va moslashuvchan hisoblanadi. Chunki aksariyat tabiiy va texnik tizimlar o‘zining ichki murakkabligi va nolinear bog‘lanishlari bilan ajralib turadi.Maqola davomida dinamik tizimlar nazariyasining muhim elementlari — faza tekisligi tahlili, muvozanat nuqtalari va ularning barqarorligi, Lyapunov usuli, bifurkatsiya hodisalari hamda xaos nazariyasi asosida tizimlarning xatti-harakatlari chuqur o‘rganildi. Keltirilgan matematik modellar va misollar orqali nolinear tizimlarning nafaqat barqaror yoki davriy, balki murakkab va tartibsiz (xaotik) holatlarga ham o‘tishi mumkinligi ko‘rsatib berildi.Shuningdek, maqolada nolinear differensial tenglamalarning amaliy qo‘llanilishiga alohida e’tibor qaratildi. Xususan, biologik populyatsiyalar dinamikasi, fizik jarayonlar, iqtisodiy tizimlar hamda muhandislik masalalarida ushbu tenglamalar muhim vosita sifatida xizmat qilishi asoslab berildi. Bu esa nolinear modellashtirishning zamonaviy ilm-fan va texnologiyalardagi ahamiyatini yana bir bor tasdiqlaydi.Olib borilgan tahlillar shuni anglatadiki, nolinear differensial tenglamalarni o‘rganish nafaqat nazariy jihatdan muhim, balki amaliy masalalarni hal etishda ham katta imkoniyatlar yaratadi. Ayniqsa, murakkab tizimlarning uzoq muddatli xatti-harakatlarini bashorat qilish, ularning barqarorligini ta’minlash va boshqarish masalalarida ushbu yondashuv muhim rol o‘ynaydi.Kelgusida ushbu yo‘nalishda olib boriladigan tadqiqotlar sonli usullarni rivojlantirish, kompyuter modellashtirish imkoniyatlarini kengaytirish hamda sun’iy intellekt bilan integratsiyalash orqali yanada yuqori natijalarga erishishga xizmat qiladi. Shu bilan birga, nolinear tizimlarning chuqur o‘rganilishi yangi ilmiy yo‘nalishlarning paydo bo‘lishiga va murakkab muammolarning samarali yechimlarini topishga zamin yaratadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Boyce, W.E., DiPrima, R.C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Wiley, 2022.
2. Samarskii, A.A. The Theory of Difference Schemes. Marcel Dekker, 2001.
3. V.M. Fikhtengolts. Differensial va integral hisob. Toshkent: O‘qituvchi, 1980.
4. MATLAB Documentation. Ordinary Differential Equations Solvers. MathWorks, 2024.
5. Chapra, S.C., Canale, R.P. Numerical Methods for Engineers. McGraw-Hill, 2020.
6. Djabbarov, Manshurov, Sh.T.; Jonqobilov, J.T.. C++ Dasturlarlash Tilida n-Xonali Palindromik Sonlarni Topish. 173-178
7. Odil Djurayevich; Jonqobilov, Jahongir Tirkashevich. TRIGONOMETRIK FUNKSIYALARNI EKVIVALENT TA’RIFI HAQIDA. 581-585
8. F.M. Muminov, N.T. Dushatov, Z.M. Miratoev. ON THE FORMULATION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ONE SECOND-ORDER EQUATION. American Journal Of Applied Science And Technology. 4(6), 58-63