НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙСМЕШАННОГО ТИПА

Муминов Фарход Маликович
канд.мат-физ. наук, доцент,
Алмалыкский государственный технический институт,
Республика Узбекистан, г. Алмалык
E-mail: farxod.muminov.58@inbox.ru

АННОТАЦИЯ

В этом статье приводится постановка нелокальных задач для уравнения третьего порядка смешанного-составного типа. При определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения доказывается этих задач.

Ключевые слова: *уравнения опорные понятия, уравнения смешанная нелокальная задача, сингулярная интегральная уравнения.*

В работе **[1]** А.**В**.Бицадзе, А.А.Самарского была поставлена и исследована новая нелокальная задача для эллиптических уравнений, которая в настоящее время называется задачей Бицадзе- Самарского. **В** дальнейшем такие нелокальные задачи для различных классов уравнений нашли приложения в линейных обратных или в задачах управления и в целом ряде других задач из механики и физики **[2-4]**. **В** этом статье предлагается постановка нелокальной задачи для смешанного уравнения и доказывается, что при определенных условиях на коэффициенты уравнения поставленные задачи разрешимы в пространстве Соболева $W_1^2(D)$ Постановка задачи . Рассмотрим уравнение

$$Lu = yU_{yy} + U_{xx} + lU_y = f(x, y) \quad \textbf{\textit{(1)}}$$

(1)

Это уравнение параболического типа при $y \geq 0$ и гиперболического типа при $y < 0$. Характеристики уравнения (1) ветви семейства парабол $x - 2\sqrt{-y} = const,\ x + 2\sqrt{-y} = const$ имеют огибающую ось $y = 0$ параболического вырождения уравнения (1).

Таким образом, линия параболического вырождения уравнения (1) является одновременно его характеристикой. Обозначим через D конечную область, ограниченную прямоугольником ABB_1A_1 , с вершинами $A(0,0),\ B(1,0),\ B_1(1,1),\ A_1(0,1)$ лежащей в полуплоскости и характеристиками $AC: x-2\sqrt{-y}=0$ и $BC: x+2\sqrt{-y}=1$ уравнения (1). Часть области D удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=u(1,y)=0 \tag{2}$$

$$u(x,1)=\beta(x)u(x,y)/AC\cup BC \tag{3}$$

$n=(n_1,n_2)-$ единичный вектор внутренней нормали к ∂D. Всюду ниже предполагается, что $f_i(x,y)\in C^2(D),\ i=1,2$

$$\beta(x)=\begin{cases}\exp\left[-\dfrac{\lambda}{2}\left(\dfrac{x^2}{4}+1\right)\right], & при\ \ 0\le x\le\dfrac{1}{2},\\ \exp\left[-\dfrac{\lambda}{2}\left(1+\dfrac{(1-x)^2}{4}\right)\right], & при\ \ \dfrac{1}{2}\le x\le 1,\end{cases}$$

где $\lambda>0$.

Обозначим через C_L класс функций из $C^2(\overline{D})$, удовлетворяющие краевым условиям (2),(3). Через $W_2^{'}(D)$ будем обозначить пространства Соболева, полученные замыканием класса функций C_L по норме

$$\|u\|_1^2=\int_D(u_x^2+u_y^2+u^2)dD,$$

по пространствам функцией $W_2^{'}(D)$ и $L_2(D)$ построим негативное пространства $W_2^{-1}(D)$.

$$\|f\|_{-1}=\sup_{u\in W_2^{'}}\left(\frac{(f,u)_0}{\|u\|_1}\right)$$

Задача . Найти решения уравнения

$$Lu=yU_{yy}+U_{xx}+lU_y=f(x,y)$$

в области D, удовлетворяющее условиям (2)-(3). Уравнение принадлежит эллиптическому типу при y>0 и гиперболическому типу при y<0.

Лемма . Пусть существует константа λ >o такая, что выполнены неравенства $2l(x,y)-\lambda y-1\ge\delta>0$ в области D. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|f\|_0 \geq \|U\|_2 \leftrightarrow \left|(4u, l^{\lambda y})_0\right| \geq m_2 \|U\|^2_{W_2^1} \qquad (4)$$

Доказательство.Рассмотрим интеграл $2(Lu, e^{\lambda y}U_y)_0$ *где* $U \in C_L^2(D)$ Интегрируя это выражение по частям имеем

$$2(Lu, e^{\lambda y}U_y)_0 = \int_D e^{\lambda y}\left[\wedge U_x^2 + (2x - \lambda y - 1)U_y^2\right]dD -$$

$$-\int_\Gamma e^{\lambda y}\left[(U_x^2 - yU_y^2)n_2 - 2U_xU_yn_2\right]ds - e^{\lambda}\int_0^1 U_x^2(x,1)dx + e^{\lambda}\int_0^1 U_y^2(x,1)dx$$

Используя условия (8) и условия теоремы, получим неравенство (4). Отсюда следует единственность регулярного решения задачи .

Теорема . Пусть выполнены условия леммы . Тогда для любой функции U(x,v) $\in$ L(D) существует обобщенное решение задачи из пространства $W_2^1(D)$

Доказательство. Выбираем последовательность собственных функций $\{V_n(x,y)\} \in W_2^4(D) \cap \overset{0}{W}{}_2^2(D)$ задачи

$$\Delta^2 V_n(x,y) = \lambda_n^2 V_n(x,y)$$

$$V_n(x,y)\Big|_{\partial D} = 0, \frac{\partial V_n(x,y)}{\partial N}\Big|\partial D = 0$$

Известно, что система собственных функций $\{V_n\}$ полна в $W_2^4(D) \cap \overset{0}{W}{}_2^2(D)$

Определим последовательность функций следующим образом

$$l^{\lambda y}\vartheta_{ny}(x,y) = V_n(x,y) \qquad (5)$$

$$\vartheta_n(x,1) = \beta(x)\vartheta(x,y)\Big|_\Gamma n = 1,2,3,... \qquad (6)$$

Легко видеть, что существует единственное решение $\vartheta_n \in C_L$ этой задачи, которое дается формулой

$\vartheta_n(x,y) = \int_\Gamma^y l^{-\lambda\tau}V_n(x,\tau)d\tau + \frac{1}{\beta - 1}\int_\Gamma^y l^{-\lambda\tau}V_n(x,t)dt$ Пусть $\vartheta_n(x,y)$ решение задачи (5)-(6). Тогда получаем

$$(\vartheta_n L^* V_n) = (L\vartheta_n, V_n)_0 \geq m_2 \|\vartheta_n\|_0^2$$

Откуда

$$\|L^* V_n\|_{W_2^1} \geq C\|\vartheta_n\|_{W_2^1}\|V_n\|_0$$

где $\boldsymbol{m_0}$,m_0,C,C_1- постоянное. L* - формально сопряженный оператор к **L.**

(E)ISSN: 2181-1784
6(3), 2026
www.oriens.uz

Решение задачи 6 будем искать в виде

$$U^N(x,y)=\sum_{n=1}^{N} C_n\vartheta_n(x,y),$$

где постоянные C_n определяются из систем линейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, e^{\lambda y}\vartheta_{ny})_0=(f, e^{\lambda y}\vartheta_{ny})_0 \qquad (7)$$

Система (7) разрешима при любых $f\in L_2(D)$ ибо для нее имеет место теорема единственное. Действительно, если бы $U^N(x,y)$ было решением однородной системы уравнений (1), то умножая каждое уравнение на свое C_n и складывая по n от n=1 до n=N мы пришли бы к соотношению

$$(Lu_N, e^{\lambda y}U_y^N)_0=0$$

из которого в силу (21) следовало бы. что $U^N(x,y)=0$ т.е. все $C_n, n=\overline{1,N}$ равны нулю.

Итак, система (21) однозначно определяет $U^N(x,y)$ Умножим каждое из (21) на C_n и сложим по n от n=1 до n=N. Это дает равенство

$$(Lu^N, e^{\lambda y}U_y^N)_0=(f, e^{\lambda y}U_y^N)_0$$

из которого и силу (18) следует неравенство

$$C\left\|U^N\right\|^2_{W_2^1}\le\|f\|_0\left\|U^N\right\|_{W_2^1}$$

откуда

$$C\left\|U^N\right\|_{W_2^1}\le\|f\|_0$$

Таким образом множество функций $\{U^N\}_\rho$ $N=1,2,3,...$ ограничено в W_2^1 Известно, что множество слабо компактно в W_2^1 (D) т.е. из него можно выделить подпоследовательность слабосводящуюся и в W_2^1 (D) к некоторой функции $U\in W_2^1(D)$

Тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщенных линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. - 1969. - Т. 185, №4. - с. 739-740.

2. Врагов В Н. Об одном уравнении смешанно-составного типаУ/Дифферснц. уравнения, 1973.-Т. 9,№1.-С. 169-171.

3. Бесов О.В., Ильин В.П., Николаевский С.М. Интегральные предоставления функций и теоремы вложения. М: Наука. 1975. 480 стр.

4. Брюханов Ю.А. Об одном классе эллиптических уравнений, выражавшихся на границе. Дифференциальные уравнения. 1973. Т.4 166-168 стр.

5. Муминов Ф.М., Муминов С.Ф. "Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешенного типа "CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES. 02 Issue:04/Aprel 2021 ISSN:2660-5309

6. Муминов, Ф. М., & Каримов, С. Я. Утабов У нелокальная краевая задача для линейных уравнений смешанного типа Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences. *Volume*, *2*, 2181-1784.

7. Муминов, Ф. М., & Каримов, С. Я. (2024). О смешанных краевых задачах для уравнения составного типа третьего порядка. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, *4*(2), 623-629.