

## ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛИ УРАВНЕНИИ СМЕШАННОГО ТИПА

**Муминов Фарход Маликович**

канд.мат-физ. наук, доцент,

Алмалыкский государственный технический институт,

Республика Узбекистан, г. Алмалык

E-mail: [farxod.muminov.58@inbox.ru](mailto:farxod.muminov.58@inbox.ru)

### АННОТАЦИЯ

*В этой статье приводится постановка нелокальных задач для уравнения третьего порядка смешанного-составного типа. При определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения доказываются этих задач.*

**Ключевые слова:** *уравнения опорные понятия, уравнения смешанная нелокальная задача, сингулярная интегральная уравнения.*

Этот параграф посвящен изучению одной корректной краевой задачи для уравнения смешанного гипербола-параболического типа, линия вырождения которого является характеристикой. Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} U_{xx} - U_y, y \geq 0 \\ 0 = Lu = (-y)^n U_{xx} - U_{yy}, y, 0, -1m < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Пусть область D состоит из параболической части D<sup>+</sup> ограниченной отрезками АВ, В<sub>0</sub>В, А<sub>0</sub>В<sub>0</sub> и АА<sub>0</sub> прямых y=0; x=1; y=y<sub>0</sub>, x=0 и гиперболической части D<sup>-</sup> ограниченной характеристиками уравнения (1) при y<0.

$$AC : x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$$

$$BC : x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

Известно, что в полуплоскости y<0 уравнение (1) характеристических координатах

$$\xi = x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}}, \zeta = x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}}$$

переходит в уравнение Эйлера-Дарбу

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\beta}{\zeta - \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$$

Где

$$\beta = \frac{m}{2(m+2)} \text{ и } -\frac{1}{2} < \beta < 0 \text{ при } -1 < m < 0$$

Известно, что решение уравнения Эйлера-Дарбу с начальными данными см. [59]

$$U(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = [2(1-2\beta)]^{-2\beta} (\zeta - \xi)^{2\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = V(x)$$

имеет вид

$$U(x, y) = H_1 \int_0^1 \tau(t) Z^\beta (1-Z)^\beta dz + \frac{H_1}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} \int_0^1 \tau(t) Z^\beta (1-Z)^\beta (2Z-1) + \\ + [2(1-2\beta)]^{-2\beta} H_2 y \int_0^1 V(t) Z^{-\beta} (1-Z)^{-\beta} dZ$$

(1)

ГДЕ  $t = x + \frac{2}{m+2} (y)^{\frac{m+2}{2}} (2Z-1)$

Выражение вида (1) будем называть обобщенным решением уравнения (1) в области  $D: 0 < \xi < \zeta < 1$  если  $\tau(t)$  и  $V(t)$  непрерывны при  $0 < t < 1$ . Класс  $R_2$ . Обобщенное решение (1) принадлежит классу  $R_2$  если  $V(x)$  непрерывна в  $(0,1)$  и интегрируема, и если  $\tau(x)$  есть и не фал дробного порядка  $-(2\beta-1)$  от некоторой функции  $T(x)$ , непрерывной и интегрируемой на  $(0,1)$  т.е.

$$\tau(x) = \tau(0) + \int_0^x (x-t)^{-2\beta} T(t) dt, \quad (-1 < \beta < 0)$$

Задача. Найти функцию  $u(x,y)$  обладающую следующими свойствами:

1.  $U(x, y) \in C(\bar{D})$
2. Производные  $U_x$  и  $U_y$ , непрерывны вплоть до отрезка АВ;
3.  $U(x,y)$  является в  $D^+$  классическим решением уравнения (1), а в  $D^-$  обобщенным решением уравнения (1) класса  $R_2$ .
4. Удовлетворяет условию склеивания

$$\frac{\partial u(x_1+0)}{\partial y} = \frac{\partial u(x_1-0)}{\partial y} = V(x), \quad 0 < x < 1$$

$$U(x_1+0) = U(x_1-0) = \tau(x), \quad 0 < x < 1$$

и краевым условиям  $U(0, y) = \vartheta_0(y) \quad 0 \leq y \leq y_0$  (2)

$$\left[ \gamma_2(y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \beta_2(y) U(x, y) \right] \Big|_{x=1} + \delta(y) = \left[ \gamma_1(y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \beta_1(y) U(x, y) \right] \Big|_{x=1} \quad 0 \leq y \leq y_0 \quad (3)$$

$$U(x, y) \Big|_{AC} = \zeta(y), \quad -\frac{1}{2} \leq y < 0 \quad (4)$$

также условию согласования  $\vartheta_0(0) = \zeta(0)$ , где  $x_0$ -любая фиксированная точка интервала  $(0, 1)$ ;  $\vartheta_0(y), \gamma_1(y), \gamma_2(y), \beta_1(y), \beta_2(y), \delta(y)$  - заданные функции. непрерывные в замыкании области их **определения**, **причем**

$$\beta_{2(y)} \neq 0, \zeta(y) \in C \left[ -\frac{1}{2}, 0 \right] \cap C^2 \left( -\frac{1}{2}, 0 \right)$$

Доказательство существования и единственности решения. Из уравнения (1) и силу постановки задачи следует, что  $\tau(x)$  и  $V(x)$

на  $(0, 1)$  связаны соотношением, принесенным из параболической **части**

$$\tau''(x) - V(x) = 0 \quad (5)$$

И удовлетворяет условиям

$$\tau(0) = 0 \quad (6)$$

$$\left[ \gamma_1(0) \tau'(x) + \beta_1(0) \tau(x) \right] \Big|_{x=x_0} = \left[ \gamma_2(0) \tau'(x) + \beta_2(0) \tau(x) \right] \Big|_{x=1} + \delta(0) \quad (7)$$

Известно . что основное функциональное соотношение между  $M$  и  $V(x)$  принесенное из гиперболической части  $D$  смешанной области на линию вырождения  $AB$  представляется в виде

к

$$\tau(x) = H_3(x-t)^{-2\beta} V(t) dt + \phi_1(x) \quad (8)$$

Где

$$\phi_1(x) = \frac{2\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+2\beta)} D_0^{2\beta-1} \left[ x^\beta D_0^{1-\beta} \zeta(x) \right]$$

$$H_3 = \frac{4(1-2\beta)^{2\beta-1} \Gamma(2-2\beta) \cos \pi\beta}{\Gamma^2(1-\beta)}$$

$$-\frac{1}{2} < \beta < 0 \text{ при } -1 < m < 0$$

Для нахождения  $\zeta(x)$  и  $V(x)$  решим систему уравнений (5)-(8) с условиями (6)-(7).

Из соотношения (8) определим  $v_m$  через функцию  $\langle x \rangle$  для этого (8) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \zeta(x) - \phi_1 &= H_3 \int_0^x (x-t)^{-2\beta} V(t) dt \\ \int_0^x (x-t)^{-2\beta} V(t) dt &= \frac{1}{H_3} [\zeta(x) - \phi_1(x)] \end{aligned} \quad (9)$$

Интеграл в равенстве (9) является интегралом дробного порядка  $-(2\beta-1)$  от функции  $V(x)$ , т.е.

$$\Gamma(1-2\beta) D_{0x}^{2\beta-1} V(t) = \int_0^x (x-t)^{-2\beta} V(t) dt \quad (10)$$

Поставляя (10) в (9) получим

$$D_{0x}^{2\beta-1} V(t) = \frac{\gamma(x) - \phi_1(x)}{H_3 \Gamma(1-2\beta)} \quad (11)$$

Для нахождения функции  $V(x)$  применим к обеим частям равенство (11) оператор  $D_{0x}^{1-2\beta}$

$$D_{0x}^{1-2\beta} D_{0x}^{2\beta-1} V(t) = \frac{D_{0x}^{1-2\beta} [\gamma(x) - \phi_1(x)]}{\Gamma(1-2\beta) H_3}$$

и используя известное свойство оператора

$$D_{0x}^\lambda : D_{0x}^\lambda D_{0x}^{-\lambda} V(x) = V(x), \forall \lambda > 0$$

получим

$$V(x) = \frac{D_{0x}^{1-2\beta} [\gamma(x) - \phi_1(x)]}{H_3 \Gamma(1-2\beta)}$$

Так как порядок оператора  $D_{0x}^{1-2\beta}$  положительный  $1-2\beta > 0$  и  $1 < 1-2\beta < 2$ , то равенство (12) запишем в виде

$$V(x) = \lambda_1 \frac{d^2}{dx^2} D_{0x}^{-2\beta-1} [\gamma(x) - \phi_1(x)]$$

Где 
$$\lambda_1 = \frac{1}{H_3 \Gamma(1-2\beta)}$$

Подставляя последнее равенство в (2.4.5) получим

$$\frac{d^2}{dx^2} [\gamma(x) - \lambda_1 D_{0x}^{-2\beta-1} \gamma(x)] = -\lambda_1 \frac{d^2}{dx^2} D_{0x}^{-2\beta-1} \Phi_1(x) \quad (13)$$

В операторе  $D_{0x}^{-2\beta-1}$  порядок  $-2\beta - 1 < 0$ . поэтому (13) имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ \gamma(x) - \frac{\lambda_1}{\Gamma(1+2\beta)} \int_0^x (x-t)^{2\beta} \gamma(t) dt = -\frac{\lambda_1}{\Gamma(1-2\beta)} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x (x-t)^{2\beta} \Phi_1(t) dt \right] \quad (14)$$

Интегрируя (14) получим:

$$\gamma(x) - \lambda \int_0^x (x-t)^{2\beta} \gamma(t) dt = k_1 x + k_2 - \lambda \int_0^x (x-t)^{2\beta} \Phi_1(t) dt \quad (15)$$

Где  $\lambda = \frac{\lambda_1}{\Gamma(1+2\beta)}$ ,  $k_1, k_2$  - произвольные постоянные подлежащие

определению.

Уравнение (15) является уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью и следовательно однозначно разрешимо и решение его можно выписать в виде [46].

$$\gamma(x) = F(x) - \lambda \int_0^x \Gamma(x, t, \lambda) F(t) dt \quad (16)$$

где  $f(x)$ -правая часть уравнения, а  $\Gamma(x, t, \lambda)$  резольвента ядра уравнения, т.е. в нашем случае

$$f(x) = k_1 x + k_2 - \lambda \int_0^x (x-t)^{2\beta} \Phi_1(t) dt$$

Постоянные  $k_1$  и  $k_2$  находим из условий (6) и (7). Из условия (6) следует, что...?

$$k_2 = 0$$

Продифференцируем обе части уравнения (15) по  $x$ . Получим

$$\gamma^1(x) = k_1 + \lambda \int_0^x (x-t)^{2\beta} \gamma^1(t) dt - \lambda \int_0^x (x-t)^{2\beta} \Phi_1^1(t) dt \quad (17)$$

или

$$\gamma^1(x) - \lambda \int_0^x (x-t)^{2\beta} \gamma^1(x) dx = k_1 - \lambda \int_0^x (x-t)^{2\beta} \Phi_1^1(t) dt$$

$\gamma^1(x)$  определим из (2.4.17) аналогично как мы определили  $\gamma(x)$  из (15)

$$\gamma^1(x) = F^1(x) - \lambda \int_0^x \Gamma(x, t, \lambda) F^1(t) dt \quad (18)$$

здесь  $F^1(x)$ -правая часть уравнения, а  $\Gamma(x, t, \lambda)$  резольвента ядра уравнения, т.е. в нашем случае

$$F(x) = k_1 - \lambda \int_0^x (x-t)^{2\beta} \Phi_1^1(t) dt$$

Подставляя (16). (18) в (7) найдём

$$K_1 = \frac{-\lambda_1(O)f_5(x_0) - \beta_1(O)f_6(x_0) + \lambda_2(O)f_5(1) + \beta_2(O)f_6(1) + \delta(O)}{-\lambda_1(O)f_3(x_0) - \beta_1(O)f_4(x_0) + \lambda_2(O)f_3(1) + \beta_2(O)f_4(1)}$$

где

$$f_3(x) = 1 - \lambda \int_0^x \Gamma(x, t, \lambda) dt$$

$$f_4(x) = x - \lambda \int_0^x \Gamma(x, t, \lambda) dt$$

$$f_5(x) = -\lambda \int_0^x (x-t)^{2\beta} \Phi_1^1(t) dt + \lambda \int_0^x \Gamma(x, t, \lambda) F_1(t) dt$$

$$F_1(x) = \lambda \int_0^x (x-t)^{2\beta} \Phi_1^1(t) dt$$

$$f_6(x) = -\lambda \int_0^x (x-t)^{2\beta} \Phi_1(t) dt + \lambda \int_0^x \Gamma(x, t, \lambda) f_1(t) dt$$

$$F_1(x) = \lambda \int_0^x (x-t)^{2\beta} \Phi_1(t) dt$$

Известно, что решение (1)-(2) и представимо с помощью функции Грина в виде

$$U(x, y) = \int_0^{y_0} g_0(\zeta) \frac{\partial G(\xi, \zeta; x, y)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} d\zeta + \int_0^1 \tau(\xi) G(\xi, \zeta; x, y) \Big|_{\zeta=0} d\xi - \int_0^{y_0} g_1(\zeta) \frac{\partial G(\xi, \zeta, x, y)}{\partial \xi} \Big|_{x=1} d\zeta \quad (19)$$

где  $g_0, \tau$  - известные функции.

Вычислим от  $U(x, y)$  производную по  $x$ , получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^{y_0} g_0(\zeta) \frac{\partial^2 G(\xi, \zeta, x, y)}{\partial \xi \partial x} \Big|_{\xi=0} d\zeta + \int_0^1 \tau(\xi) \frac{\partial G(\xi, \zeta, x, y)}{\partial x} \Big|_{\zeta=0} - \int_0^{y_0} g_1(\zeta) \frac{\partial^2 G(\xi, \zeta, x, y)}{\partial \xi \partial x} \Big|_{\xi=1} d\zeta$$

Подставляя (19), (20) в условие (3), получим

$$\beta_2(y)\mathcal{G}_1 + \int_0^{y_0} \frac{k(y, \zeta)}{(y-\zeta)^{42}} \mathcal{G}_1(\zeta) d\zeta = F(\zeta)$$

где

$$k(y, \zeta) = \gamma_1(y) \frac{\partial^2 G(\xi, \zeta, x, y)}{\partial \xi \partial x} \Big|_{\substack{\xi=1 \\ x=x_0}} + \beta_1(y) \frac{\partial G(\xi, \zeta, x, y)}{\partial \xi} \Big|_{\substack{\xi=1 \\ x=x_0}} + \gamma_2(y) \frac{\partial^2 G(\xi, \zeta, x, y)}{\partial \xi \partial x} \Big|_{\substack{\xi=1 \\ x=x_0}}$$

$$F(x, y) = \gamma_1(y) \left[ \int_0^{y_0} \mathcal{G}_0(\zeta) \frac{\partial^2 G(\xi, \zeta, x, y)}{\partial \xi \partial \zeta} \Big|_{\xi=0} d\zeta + \int_0^1 \tau(\xi) \frac{\partial G(\xi, \zeta, x, y)}{\partial x} \Big|_{\zeta=0} d\xi \right] +$$

$$+ \beta_1(y) \left[ \int_0^{y_0} \mathcal{G}_0(y) \frac{\partial G(\xi, \zeta, x, y)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} d\zeta + \int_0^1 \tau(\xi) G(\xi, \zeta, x, y) \Big|_{\zeta=0} d\xi \right] -$$

$$- \lambda_2(y) \left[ \int_0^{y_0} \mathcal{G}_0(\zeta) \frac{\partial^2 G(\xi, \zeta, x, y)}{\partial \xi \partial \zeta} \Big|_{\xi=0} d\zeta + \int_0^1 \tau(\xi) \frac{\partial G(\xi, \zeta, x, y)}{\partial x} \Big|_{\zeta=0} d\xi \right] - \delta(y)$$

Так, как

функция  $\beta_2(y) \neq 0, \forall y \in [0, y_0]$  уравнение (21) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которое однозначно разрешимо в классе непрерывных функций. Следовательно решение задачи 10 существует, единственно и определяется в  $D^+$  по формуле (19), а в  $D^-$  по формуле

$$U(x, y) = H_1 \int_0^1 \tau(t) \vartheta^\beta (1-\vartheta)^\beta d\vartheta + \frac{H_1(-y)^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \int_0^1 \tau^1(t) \vartheta^\beta (1-\vartheta)^\beta (2\vartheta-1) d\vartheta +$$

$$+ \frac{[2(1-2\beta)]^{1-2\alpha} H_2 \int_0^1 \tau^2(t) \vartheta^{\frac{m+2}{2}} (2\vartheta-1)^{-\beta} d\vartheta}{m+2}$$

$$H_1 = \frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)}, H_2 = 2(1-2\beta)^{2\beta-1} \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщенных линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. - 1969. - Т. 185, №4. - с. 739-740.
2. Врагов В Н. Об одном уравнении смешанно-составного типа//Дифференц. уравнения, 1973.-Т. 9,№1.-С. 169-171.

3. Бесов О.В., Ильин В.П., Николаевский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М: Наука. 1975. 480 стр.
4. Брюханов Ю.А. Об одном классе эллиптических уравнений, выражавшихся на границе. Дифференциальные уравнения. 1973. Т.4 166-168 стр.
5. Муминов Ф.М., Муминов С.Ф. “Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешенного типа ”CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES. 02 Issue:04/Aprel 2021 ISSN:2660-5309
6. Муминов Ф.М., Каримов С.Я., Утабов У нелокальная краевая задача для линейных уравнений смешанного типа Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, Volume 2 ISSUE 11 ISSN 2181-1784 SJIF 2022: 5.947 ASI Factor = 1.7
7. Муминов Ф.М., Каримов С.Я. [О смешанных краевых задачах для уравнения составного типа третьего порядка](#). Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, Volume 4 ISSUE 2 ISSN 2181-1784 SJIF 2024: 7.404 ASI Factor = 1.7