Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences
SJIF 2023 = 6.131 / ASI Factor = 1.7
(E)ISSN:2181-1784
www.oriens.uz
3(5), May, 2023

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СМЕШАННОГО-СОСТАВНОГО ТИПА

Муминов Фарход Маликович
канд.мат-физ. наук, доцент,
Алмалыкский филиал Ташкентского
государственного технического университета,
Республика Узбекистан, г. Алмалык
E-mail: farxod.muminov.58@inbox.ru

АННОТАЦИЯ

В этом статье приводится постановка нелокальных задач для уравнения смешанного типа. При определенных условиях на коэффициенты и правую.

Ключевые слова: *уравнения опорные понятия, уравнения смешанная нелокальная задача, сингулярная интегральная уравнения.*

ABSTRACT

This article presents the formulation of non-local problems for a mixed-type equation. Under certain conditions, the correctness of these problems is proved on the coefficients and the right side of the equation.

Keywords: *the equations are basic concepts, the equations are mixed nonlocal back, singular integral equations.*

В односвязной области D, ограниченной гладкой линией σ, опирающейся на точки $A(0;1)$ и $B(1;0)$ расположенной в четверти плоскости $(x>0,\ y<0)$ и отрезками $AA_1,\ BE,\ A_1E$ прямых $x=0,\ x=1,\ y=1$ соответственно, где $O,\ E-$ точки с координатами $(0,0),\ (1,1)$ рассматриваются уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Lu\right)=0, \qquad (1)$$

где $Lu=u_{xx}+\dfrac{1-\operatorname{sgn} y}{2}u_{yy}-\dfrac{1+\operatorname{sgn} y}{2}u_{y}$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1. Функция $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области $D\ (y\neq 0)$.

2. Функция $u(x,y)$ и ее частные пройзводные первого порядка непрерывны в замкнутой области (допускается, что в точках $O(0,0),\ B(1,0)$

Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences
SJIF 2023 = 6.131 / ASI Factor = 1.7
(E)ISSN:2181-1784
www.oriens.uz
3(5), May, 2023

частные производные u_x, u_y могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы).

3. Функция $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям.

$$u\big|_{\sigma} = f(\xi), u\big|_{BE} = \psi_1(y), u(0,y) + u(0,-y)\big|_{AA_1} = \psi(y),$$
$$u_x\big|_{AA_1} = \nu(y), \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\sigma} = f_1(\xi), \qquad (2)$$

где f, $f_1, \psi, \psi_1, \nu -$ заданные функции, удовлетворяющие определенным условиям гладкости и условиям согласования, причем $\psi(y)-$ четная функция.

Задача 2. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами задачи 1 кроме краевого условия $u\big|_{BE} = \varphi_1(y)$, которое заменяется условием $u\big|_{x=1} = u\big|_{BE}$ $(0 < e < 1)$.

При исследовании этих задач будем пользоваться тем фактором, что любое регулярное решение уравнение (1) представимо в виде

$$u(x,y) = z(x,y) + \mu(y), \qquad (3)$$

соответственно [1-3], где $z(x,y)-$ регулярное решение уравнения

$$u_{xx} + \frac{1+\operatorname{sgn} y}{2} u_{yy} - \frac{1+\operatorname{sgn} y}{2} u_y = 0. \qquad (4)$$

Обозначим $\mu(y) = \begin{cases} \mu_1(y), & 0 \le y \le 1, \\ \mu_2(y), & -1 \le y \le 0, \end{cases}$ $\mu_2(x,y)-$ произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функция, $\mu_1(y)-$ произвольная непрерывно-дифференцируемая функция.

Без ограничения общности можно предполагать $\omega(0) = \omega'(0) = 0$. Предполагается, что σ целиком лежит в полосе, ограниченной прямым $x=0,\ x=1$.

Без ограничения общности можно предполагать, что $\mu(0) = \mu'(0) = 0$.

На основе (3) и (2) задача 2 редуцируется к определению регулярного решение (4) в области D $(y \ne 0)$ удовлетворяющего краевым условиям

$$z\big|_{\sigma} = f(\xi) - \mu_2(y), z\big|_{BE} = \psi_1(y) - \mu_1(y),$$
$$z\big|_{OA_1} = \varphi(y) - \mu_1(y), z\big|_{OA} = \psi(y) - \varphi(y) - \mu_2(y), \qquad (5)$$
$$z_x\big|_{AA_1} = \nu(y), \frac{\partial z}{\partial \eta}\big|_{\sigma} = f_1(\xi) - \mu_1'(y)\frac{\partial y}{\partial n}.$$

Единственность решение задачи 2 следует из принципа экстремума. (Предполагается, что $\frac{\partial x}{\partial n} \ne 0$ вдоль дуги σ).

Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences
SJIF 2023 = 6.131 / ASI Factor = 1.7
(E)ISSN:2181-1784
www.oriens.uz
3(5), May, 2023

Определим $\nu_1(x)$. Поставляя значение $\nu_1(x)$ в формулу

$$z(x,y)=\int_0^1 \nu_1(t)G(x,y;t,0)dt+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\overline{f}(\theta)\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{|\xi|=1}d\theta-\int_{-1}^{0}\nu(t)G(x,y;0,t)dt$$

имеем

$$z(x,y)=\int_{3\pi/2}^{2\pi}\mu_2(\sin\theta)\rho_1(x,y;\theta)d\theta+P(x,y), \qquad (6)$$

$\rho_1(x,y;\theta),\ P(x,y)-$ известные функции реализуя последнее условие из (5), для определения $\mu_2^{'}(y)$ получаем сингулярное интегральное уравнение (3).

$$\delta(\theta_0)\sin\theta_0+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{\delta(\theta)}{\theta-\theta_0}d\theta-\frac{\sin\theta_0}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{K_1(\theta,\theta_0)-K_1(\theta_0,\theta_0)}{\theta-\theta_0}\delta(\theta)d\theta+$$

$$+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{K_2(\theta,\theta_0)-K_2(\theta_0,\theta_0)}{\theta-\theta_0}\delta(\theta)d\theta+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi}Q(\theta,\theta_0)\delta(\theta)\cos\theta d\theta+ \qquad (7)$$

$$+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi}Q_1(\theta,\theta_0)\delta(\theta)\cos\theta d\theta=\rho_2(\theta_0),$$

где $\delta(\theta)=\mu_2^{'}(\sin\theta);\ K_1(\theta,\theta_0),\ K_2(\theta,\theta_0),\ Q(\theta,\theta_0),\ Q_1(\theta,\theta_0)-$ известные функции.

Из уравнение (7) определим функцию $\mu_2(y)$. Таким образом, функция $u(x,y)$ полностью определяется в области D_2.

Решение уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям

$$z\big|_{BE}=\psi(y)-\mu_1(y),\ \ z\big|_{OB}=\tau(x),\ \ z_x\big|_{A_1B}=\nu(y)$$

определяется по формуле

$$z(x,y)=\int_0^y \nu(t)\overline{G}(x,y;0,t)dt-\int_0^y[\psi_1(t)-\mu_1(t)]\overline{G}_{\xi}(x,y;1,t)dt-$$

$$-\int_0^y \nu(t)\overline{G}(x,y;t,0)dt, \qquad (8)$$

где $\overline{G}(x,y;\xi,\eta)-$ функция Грина.

Функция $z(x,y)$, определенная формулой (2) должна удовлетворять условию $z\big|_{OA_1}=\varphi(y)-\mu_1(y)$,

$$\varphi(y)-\mu_1(y)=\int_0^y \nu(t)\overline{G}(0,y;0,t)dt-\int_0^y \tau(t)\overline{G}(0,y;t,0)dt-$$
$$-\int_0^y[\psi(t)-\mu_1(t)]\overline{G}_\xi(0,y;1,t)dt. \qquad (9)$$

Реализуя условие $z\big|_{OA_1}=\psi(y)-\varphi(-y)-\mu_2(y)$ имеем

$$\psi(y)-\varphi(y)-\mu_2(y)=\int\mu_2(\sin\theta)\rho_1(0,y,\theta)d\theta+P(0,y). \qquad (10)$$

Поставляя значение $\varphi(y)$ в формулу (9) для определения $\mu_1(y)$, получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\mu_1(y)+\int_0^y K(y,t)\mu_1(t)dt=P_2(y), \qquad (11)$$

где $K(y,t),\ P_2(y)-$ известные функции.

Из уравнения (11) единственным образом определяется функция $\mu_1(y)$.

Задача 2 редуцируется к определению регулярного решение уравнения (5) удовлетворяющего краевым условиям

$$\left.\begin{aligned}
&z\big|_\sigma=f(\xi)-\mu_2(y),\ z\big|_{x=e}=z\big|_{BE}=\varphi_1(y)-\mu_1(y),\\
&z\big|_{OA_1}=\varphi(y)-\mu_1(y),\ z\big|_{OA}=\psi(y)-\varphi(y)-\mu_2(y),\\
&z_x\big|_{AA_1}=\nu(y)\frac{\partial z}{\partial n}\Big|_\sigma=f_1(\xi)-\mu_2'(y)\frac{\partial z}{\partial n}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Через $\varphi(y),\ \varphi_1(y)$ обозначены соответственно значения $u(0,y),\ u(1,y)\ (0\le y\le 1)$.

Единственность решения задача 2 доказывается, используя принцип максимума в предположении, что $\dfrac{\partial x}{\partial n}\neq 0$ вдоль линии.

Существование решения задачи 2 области D_2 определяется как и в случае задачи 1 решение уравнение (5) удовлетворяющее краевым условиям

$$z\big|_{BE}=\varphi_1(y)-\mu_1(y),\ z\big|_{OB}=\tau(x),\ z_x\big|_{OA_1}=\nu(x),$$

дается формулой

$$z(x,y)=\int_0^y \nu(t)\overline{G}(x,y;0,t)dt-\int_0^1 \tau(t)\overline{G}(x,y;t,0)dt-$$
$$-\int_0^y[\varphi_1(t)-\mu_1(t)]\overline{G}_\xi(x,y;1,t)dt, \qquad (13)$$

$z(x,y)$ должно удовлетворять условию

$$z\big|_{z=e} = \varphi_1(y) - \mu_1(y),$$

$$\varphi_1(y) - \mu_1(y) + \int_0^y [\varphi_1(t) - \mu_1(t)]\overline{G}_\xi(e,y;1,t)dt =$$
$$= \int_0^y \nu(t)\overline{G}(e,y;0,t)dt - \int_0^1 \tau(t)\overline{G}(e,y;t,0)dt. \tag{14}$$

Интегральное уравнения (14) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, из которого единственном образом определяется $\varphi_1(y) - \mu_1(y)$.

Реализуя условие $z\big|_{OA_1} = \varphi(y) - \mu_1(y)$ из (13) найдем

$$\mu_1(y) = \varphi(y) + \int_0^y [\varphi_1(t) - \mu_1(t)]\overline{G}_\xi(e,y;1,t)dt +$$
$$+ \int_0^1 \tau(t)G(e,y;t,0)dt + \int_0^1 \nu(t)\overline{G}(e,y;0,t)dt. \tag{15}$$

Поставляя значение $\varphi(y), \varphi_1(y) - \mu_1(y)$ в формулу (15) определим функцию $\mu_1(y)$, где $\varphi(y)$ находится из формулы (8).

REFERENCES

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981, -448 стр.
2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
3. Бицадзе А.В. Об одной задаче Франкеля. Докл. АН СССР, 1956, -Т. 109, №6.
4. Врагов В.Н. Краевые Задачи неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск: ИГУ, 1983, -84 стр.
5. Муминов Ф.М., Каримов С.Я., Утабов У нелокальная краевая задача для линейных уравнений смешанного типа Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, Volume 2 ISSUE 11 ISSN 2181-1784 SJIF 2022: 5.947 ASI Factor = 1.7
6. Муминов Ф.М., Миратоев З.М. О нелокальной краевой задаче для одного неклассического уравнения. «Scientific progress» Scientific Journal. April 2021. ISSN: 2181-1601 Volume: 1, ISSUE: 6.
7. Муминов Ф.М., Муминов С.Ф. Об Одной Нелокальной Краевой Задаче Для Уравнения Смешанного Типа. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF

MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES. Volume: 02 Issue: 04 | April 2021 ISSN: 2660-5309.

8. Muminov F.M., Bekmurodov U.N. Mixed boundary value problems for composite type equation. International Engineering Journal for Research and Development Vol.5, Issue 6, September 10, 2020.

9. Трикоми Ф.О. Линейных уравнениях смещанного типа. М. Гостехиздат, 1947.

10. Франкель Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973.

11. M.M.Usarovich, A.Y.Shahabidinovna, M.Z. Mirvaliyevich, Tools for formalized description and transformation of algorithms aimed at synthesizing devices of control computing systems. - International Engineering Journal For Research &…, 2020.

12. Соболев С.И. Пример корректности кривой задачи для уравнения колебаний струны с данными на всей границе Докл. А.К. СССР. 1956. Т109№4 с 707-709