

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Муминов Фарход Маликович

канд.мат-физ. наук, доцент,
Алмалыкский филиал Ташкентского
государственного технического университета,
Республика Узбекистан, г. Алмалык
E-mail: farxod.muminov.58@inbox.ru

Каримов Сардор Яшинович

Ассистент,
Алмалыкский филиал Ташкентского
государственного технического университета,
Республика Узбекистан, г. Алмалык
E-mail: mr_man89@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В этой статье приводится постановка нелокальных задач для уравнения смешанного типа. При определенных условиях на коэффициенты и правую.

Ключевые слова: *уравнения опорные понятия, уравнения смешанная нелокальная задача, сингулярная интегральная уравнения.*

ABSTRACT

This article presents the formulation of non-local problems for a mixed-type equation. Under certain conditions, the correctness of these problems is proved on the coefficients and the right side of the equation.

Keywords: *the equations are basic concepts, the equations are mixed nonlocal back, singular integral equations.*

Теория уравнений смешанного типа является в настоящий момент одним из важнейших разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Начало исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в 20-30 годы работами Ф.Трикоми, С.Геллерстета, где были впервые поставлены и исследованы краевые задачи для модельных уравнений

$$y^{2m+1}u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad (1)$$

т.е. для уравнений, которые в одной части области определения эллиптического типа, а в другой части гиперболического типа. Эти задачи в настоящее время носят названия задач Трикоми и Геллерстета.

Новым толчком в развитии теории краевых задач для уравнений смешанного типа послужили исследования А.М.Кельдыша, М.А.Лаврентьева, С.А.Христиановича, И.Н.Векуа, А.В.Бицадзе, В.Н.Врагова и др., в которых было указано на важность исследования уравнений смешанного типа для задач околосвуковой газовой динамика, бесконечно малых изгибов поверхностей, магнито гидродинамика и других разделов механики и физики.

Отметим, что в вышеупомянутых работах, краевых условия носят локальный характер. В настоящее время теория нелокальных задач представляет собой интенсивно развивающийся раздел дифференциальных уравнений [5],[6],[7],[8].

В работах Ф.М.Франкеля в связи с исследованием ударной волны были поставлена новая нелокальная задача для уравнений смешанного типа, существенно отличающаяся от задач Трикоми и Геллерстета, которая сейчас называется задачей Франкеля. Эта задача была исследована в работах [9],[10].

В этой статье предлагается постановка нелокальной задачи для смешанного уравнения и доказывается, что при определенных условиях на коэффициенты уравнения поставленные задачи разрешимы в пространстве Соболева $W_2'(D)$.

Постановка задачи 1. Рассмотрим уравнение

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} + f_1(x, y)u_y = f_1(x, y) \text{ при } y \geq 0, \\ yu_{yy} + u_{xx} + f_2(x, y)u_y = f_2(x, y) \text{ при } y < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Это уравнение параболического типа при $y \geq 0$ и гиперболического типа при $y < 0$. Характеристики уравнения (2) ветви семейства парабол $x - 2\sqrt{-y} = \text{const}$, $x + 2\sqrt{-y} = \text{const}$ имеют огибающую ось $y = 0$ параболического вырождения уравнения (2).

Таким образом, линия параболического вырождения уравнения (2) является одновременно его характеристикой. Обозначим через D конечную область, ограниченную прямоугольником ABB_1A_1 , с вершинами $A(0,0)$, $B(1,0)$, $B_1(1,1)$, $A_1(0,1)$ лежащей в полуплоскости и характеристиками $AC: x - 2\sqrt{-y} = 0$ и $BC: x + 2\sqrt{-y} = 1$ уравнения (2). Часть области D удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = u(1, y) = 0 \quad (3)$$

$$u(x,1) = \beta(x)u(x,y)/AC \cup BC \quad (4)$$

$n = (n_1, n_2)$ – единичный вектор внутренней нормали к ∂D . Всюду ниже предполагается, что $f_i(x, y) \in C^2(D)$, $i = 1, 2$

$$\beta(x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{x^2}{4} + 1\right)\right], & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(1 + \frac{(1-x)^2}{4}\right)\right], & \text{при } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$.

Обозначим через C_L класс функций из $C^2(\bar{D})$, удовлетворяющие краевым условиям (2),(3). Через $W_2'(D)$ будем обозначить пространства Соболева, полученные замыканием класса функций C_L по норме

$$\|u\|_1^2 = \int_D (u_x^2 + u_y^2 + u^2) dD,$$

по пространствам функцией $W_2'(D)$ и $L_2(D)$ построим негативное пространства $W_2^{-1}(D)$.

$$\|f\|_{-1} = \sup_{u \in W_2'} \left(\frac{(f, u)_0}{\|u\|_1} \right)$$

Лемма 1. Пусть $f_1(x, y) \geq \delta_1 > 0$ в области D^+ , и пусть кроме того

$$2f_2(x, y) - \lambda y - 1 \geq \delta_2 > 0, (x, y) \in D^-.$$

Тогда имеют место неравенство

$$|(Lu, e^{\lambda y} u_y)_0| \geq m \|u\|_1^2, \forall u \in C_L, m > 0. \quad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим следующее тождество:

$$\begin{aligned} & (u_{xx} + f_1(x, y)u_y, e^{\lambda y} u_y)_{0, D^+} + (yu_{yy} + u_{xx} + f_2(x, y)u_y, e^{\lambda y} u_y)_{0, D^-} = \\ & = \int_{D^-} e^{\lambda y} \left(\frac{\lambda}{2} u_x^2 + f_1(x, y)u_y^2 \right) dD^+ + \int_{D^+} e^{\lambda y} \left[\frac{\lambda}{2} u_x^2 + \frac{1}{2} (2f_2(x, y) - \lambda y - 1)u_y^2 \right] dD^- - \\ & - \frac{e^{\lambda}}{2} \int_0^1 u_x^2(x, y) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^-} e^{\lambda y} [(u_x^2 - yu_y^2)n_2 - 2u_x u_y n_1] dS, \end{aligned}$$

(5)

которое получено интегрированием по частям, где $\Gamma^- = AC \cup BC$. В тождестве (5) учтено условие (2). Легко видеть, что так как выполнены условие леммы, мы получим неравенство

$$I_1^+ + I_2^- \geq 0.$$

Далее криволинейный интеграл в (5) вычислим на характеристике AC

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{AC} e^{-\frac{\lambda x^2}{4}} \left\{ \left[u_x^2 - \frac{x^2}{4} u_y^2 \right] n_2 - 2u_x u_y n_2 \right\} dS &= \frac{1}{2} \int_0^{1/2} e^{-\frac{\lambda x^2}{4}} \left[u_x^2 + \frac{x^2}{4} u_y^2 - x u_x u_y \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{1/2} e^{-\frac{\lambda x^2}{4}} \left[u_x - \frac{x^2}{2} u_y \right]^2 dx. \end{aligned}$$

Аналогично на характеристике BC имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{BC} e^{-\frac{\lambda(1-x)^2}{4}} \left\{ \left[u_x^2 + \frac{(1-x)^2}{4} u_y^2 \right] n_2 - 2u_x u_y n_1 \right\} dS = \\ = \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 e^{-\frac{\lambda(1-x)^2}{4}} \left[u_x + \frac{(1-x)^2}{2} u_y \right]^2 dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Первый граничный интеграл в (5) представим в виде

$$-\frac{e^\lambda}{2} \int_0^1 u_x^2(x, 1) dx = -\frac{e^\lambda}{2} \left[\int_0^{1/2} u_x^2(x, 1) dx + \int_{1/2}^1 u_x^2(x, 1) dx \right]. \quad (8)$$

Используя условие (3) в интегралах правой части (8) соответственно получим

$$\begin{aligned} -\frac{e^\lambda}{2} \int_0^{1/2} u_x^2(x, 1) dx &= \frac{e^\lambda}{2} \left\{ \int_0^{1/2} \beta(x) \beta_{xx} u^2(x, -\frac{x^2}{4}) dx - \right. \\ &\left. - \int_0^{1/2} \beta^2 \left[u_x(x, -\frac{x^2}{4}) - \frac{x}{2} u_y(x, -\frac{x^2}{4}) \right]^2 dx - \beta\left(\frac{1}{2}\right) \beta_x\left(\frac{1}{2}\right) u^2\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} -\frac{e^\lambda}{2} \int_{1/2}^1 u_x^2(x, 1) dx &= \frac{e^\lambda}{2} \left\{ \int_{1/2}^1 \beta(x) \beta_{xx} u^2(x, -\frac{(1-x)^2}{4}) dx - \right. \\ &\left. - \int_{1/2}^1 \beta^2 \left[u_x(x, -\frac{(1-x)^2}{4}) + \frac{1-x}{2} u_y(x, -\frac{(1-x)^2}{4}) \right]^2 dx + \right. \\ &\left. + \beta\left(\frac{1}{2}\right) \beta_x\left(\frac{1}{2}\right) u^2\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая (6)-(10) имеем

$$\Gamma_1^+ + \Gamma_2^- \geq 0$$

и тем самым лемма доказана.

Как следует доказанного неравенства (4) следует единственность регулярных решений задачи (1)-(3).

Рассмотрим формально сопряженное уравнение

$$L^*v = \begin{cases} v_{xx} - (f, v)_y = g_1(x, y), & y \geq 0, \\ (yu)_{yy} + v_{xx} - (f_2 v)_y = g_2(x, y), & y < 0, \end{cases} \quad (11)$$

и сопряженные краевые условия

$$v(x, y)_{\partial D} = 0 \quad (12)$$

$$-v_y(x, 1)\beta(x) = [yv_y n_2 + v_x n_1]_{AC \cup BC} \quad (13)$$

Обозначим через C_L^* классы функций из $C_2(\bar{D})$, удовлетворяющие краевым условиям (12)-(13).

Определение. Слабым решением задачи (11)-(13) будем называть функцию $v \in L_2(D)$ и такую, что для всех функций $u \in C_L$ выполняется тождество

$$(v, Lu)_0 = (g, u), \quad \forall u \in C_L.$$

Аналогично вводится определение слабого решения прямой задачи, т.е. функция $u \in L_2(D)$ слабое решение задачи (1)-(3), если выполнено тождество

$$(u, L^*v)_0 = (f, v)_0, \quad \forall v \in C_L^*. \quad (14)$$

Теорема 1. Если выполнены условия леммы 1, то для любой функции $g(x, y) \in L_2(D)$ существует слабое решение задачи (11)-(13).

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму

$$(v, Lu)_0 = (g, u)_0, \quad \forall u \in C_L, \quad g(x, y) \in L_2(D).$$

При фиксированной функции $g(x, y)$ получим, что $(g, u)_0$ есть непрерывный функционал над пространством $L_2(D)$. Но по неравенству (4)

$$|(g, u)_0| \leq m \|g\| \cdot \|Lu\|.$$

Отсюда $(g, u)_0$ можно рассматривать как линейный непрерывный функционал по Lu над некоторым подпространством пространства $L_2(D)$. Продолжая этот функционал на все пространство $L_2(D)$ по непрерывности и используя теорему Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве, получим, что существует функция $v(x, y) \in L_2(D)$ и такая, что

$$(v, Lu)_0 = (g, u)_0, \quad \forall u \in C_L.$$

Теорема 2. Если выполнены условия леммы 1. Тогда для любой функции $f_i(x, y) \in L_2(D)$, $i = 1, 2$ существует слабое решение задачи (1)-(3) из пространства $W_2'(D)$.

Доказательство. Рассмотрим в области D для дифференциального уравнения первого порядка

$$lu = e^{\lambda y} u_y = v(x, y), v(x, y) \in C^*_L. \quad (15)$$

Нелокальную задачу

$$\left. \begin{aligned} u(0, y) = u(1, y) = 0, \\ u(x, 1) = \beta(x)u(x, y)/AC \cup BC \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Легко видеть, что существует единственное решение $u \in C_L$ этой задачи, которое дается формулой

$$u(x, y) = \int_{\Gamma} e^{-\lambda \tau} v(x, \tau) d\tau + \frac{1}{\beta + 1} \int_{\Gamma} e^{-\lambda \tau} v(x, \tau) d\tau.$$

Пусть $u(x, y)$ – решение задачи (15)-(16). Из (15) получаем

$$\|L^* v\|_{W_2^{-1}} \|u\|_{W_2^1} \geq (L^* v, u)_0 = (v, Lu)_0 = (e^{\lambda y} u_y, Lu) \geq \|u\|_1^2.$$

Откуда

$$\|L^* v\|_{W_2^{-1}} \geq m \|v\|_0, \forall v(x, y) \in C^*_L. \quad (17)$$

Так как из (15) следует, что $\|u\|_{W_2^{-1}} \geq m \|v\|_0$. Из априорной оценки (17), как известно [2], вытекает, что выполняется (14). Теорема доказана.

REFERENCES

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981, -448 стр.
2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
3. Бицадзе А.В. Об одной задаче Франкеля. Докл. АН СССР, 1956, -Т. 109, №6.
4. Врагов В.Н. Краевые Задачи неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск: ИГУ, 1983, -84 стр.
5. Муминов Ф.М., Каримов С.Я., Утабов У нелокальная краевая задача для линейных уравнений смешанного типа Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, Volume 2 ISSUE 11 ISSN 2181-1784 SJIF 2022: 5.947 ASI Factor = 1.7
6. Муминов Ф.М., Миратоев З.М. О нелокальной краевой задаче для одного неклассического уравнения. «Scientific progress» Scientific Journal. April 2021. ISSN: 2181-1601 Volume: 1, ISSUE: 6.
7. Муминов Ф.М., Муминов С.Ф. Об Одной Нелокальной Краевой Задаче Для Уравнения Смешанного Типа. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF

MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES. Volume: 02 Issue: 04 | April 2021 ISSN: 2660-5309.

8. Muminov F.M., Bekmurodov U.N. Mixed boundary value problems for composite type equation. International Engineering Journal for Research and Development Vol.5, Issue 6, September 10, 2020.

9. Трикоми Ф.О. Линейных уравнениях смещанного типа. М. Гостехиздат, 1947.

10. Франкель Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973.

11. M.M.Usarovich, A.Y.Shahabidinovna, M.Z. Mirvaliyevich, Tools for formalized description and transformation of algorithms aimed at synthesizing devices of control computing systems. - International Engineering Journal For Research &..., 2020.

12. Соболев С.И. Пример корректности кривой задачи для уравнения колебаний струны с данными на всей границе Докл. А.К. СССР. 1956. Т109№4 с 707-709