Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences
SJIF 2023 = 6.131 / ASI Factor = 1.7
(E)ISSN:2181-1784
www.oriens.uz
3(2), Feb., 2023

ОПТИМАЛЬНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

[1] Нуралиев Ф.А., [2] Юлдашев Ш.Ш., [2] Кулдашева М.Н., [3] Усманжанова Н.Ш., [3] Тухтасинов Ш.Ш., [4] Марасулова Д.Ю.

[1] Ташкентский государственный транспортный университет,

[2] *Бухарский* государственный университет

[3] *Наманганский* государственный университет

[4] *Ферганский* государственный университет

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе рассматривается задача построения оптимальных интерполяционных формул типа Эрмита в пространстве Соболева. Здесь интерполяционная формула состоит из линейной комбинации значений функции в узлах и значений первой производной этой функции в конечных точках интервала [0,1].

Ключевые слова: *решение, анализ,* $L_2^{(m)}(0,1)$, $O(h^m)$.

ABSTRACT

In this paper, we consider the problem of constructing optimal interpolation formulas of Hermite type in the Sobolev space. Here, the interpolation formula consists of a linear combination of the values of the function at the nodes and the values of the first derivative of this function at the end points of the interval [0,1].

Keywords*: solution, analysis,* $L_2^{(m)}(0,1)$, $O(h^m)$.

Для любой функции пространства $L_2^{(m)}(0,1)$ погрешность интерполяционных формул оценивается с помощью нормы функционала погрешности в сопряженном пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$. Поэтому вычисляется норма функционала погрешности. Далее, чтобы найти минимум нормы функционала погрешности, применяя метод Лагранжа, использована система линейных уравнений для коэффициентов оптимальных интерполяционных формул. Показано, что порядок сходимости полученных оптимальных интерполяционных формул в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ равен $O(h^m)$. Для решения полученной системы предлагается использовать дискретный аналог дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m}. С использованием этого оператора в случаях $m=2$ построены оптимальные интерполяционные формулы. Доказано, что порядок сходимости оптимальной интерполяционной формулы в случае

$m=2$ для функций из пространства $C^4(0,1)$ равен $O(h^4)$, а для функций пространства $L_2^{(2)}(0,1)$ - $O(h^2)$.

1. Постановка задачи оптимальных интерполяционных формул

В этом пункте исследуется задача построения оптимальной интерполяционной формулы на основе вариационного метода.

Предположим, что дана таблица значений $\varphi(h\beta)$, $\beta=0,1,...,N$, $h=1/N$, N - натуральное число, функции φ и значения первой производной этой функции - в конечных точках интервала $[0,1]$, т.е. $\varphi'(0)$ и $\varphi'(1)$.

Рассмотрим следующее приближение функции φ из пространства $L_2^{(m)}(0,1)$ при $m\geq 2$ с другой более простой функцией P_φ следующим образом:

$$\varphi(z)\cong P_\varphi(z)=\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)\varphi(h\beta)+A(z)\varphi'(0)+B(z)\varphi'(1),$$

(1.1)

где $C_\beta(z)$, $\beta=0,1,...,N$, $A(z)$ и $B(z)$ - коэффициенты формулы (1.1).

Разница $\varphi-P_\varphi$ называется погрешностью аппроксимационной формулы (1.1). Оценка этой погрешности в некоторой точке $z\in[0,1]$ является линейным функционалом в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$:

$$(\ell_N^1,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\ell_N^1(x,z)\varphi(x)dx=\varphi(z)-P_\varphi(z)=$$

$$=\varphi(z)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)\varphi(h\beta)-A(z)\varphi'(0)-B(z)\varphi'(1),$$

(1.2)

где δ - дельта-функция Дирака, а

$$\ell_N^1(x,z)=\delta\left(x-z\right)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)\delta(x-h\beta)+A(z)\delta'(x)+B(z)\delta'(x-1)$$

(1.3)

- функционал погрешности аппроксимационной формулы (1.1), который принадлежит пространству $L_2^{(m)*}(0,1)$. Пространство $L_2^{(m)*}(0,1)$ является сопряженным пространством пространству $L_2^{(m)}(0,1)$. Далее, для удобства функционал погрешности $\ell_N^1(x,z)$ обозначим как $\ell_N^1(x)$.

По неравенству Коши-Шварца абсолютное значение погрешности (1.2) оценивается следующим образом:

$$|(\ell_N^1,\varphi)|\le\|\varphi|L_2^{(m)}\|\cdot\|\ell_N^1|L_2^{(m)*}\|,$$

где

$$\left\|\ell_N^1\,|\,L_2^{(m)*}\right\|=\sup_{\varphi,\|\varphi\|\neq0}\frac{|(\ell_N^1,\varphi)|}{\|\varphi|L_2^{(m)}\|}.$$

Поэтому для того, чтобы оценить погрешность аппроксимационной формулы (1.1) на функциях пространства $L_2^{(m)}(0,1)$, требуется найти норму $\|\ell_N^1\|$ функционала погрешности ℓ_N^1 в сопряженном пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$.

Отсюда мы получаем следующую задачу.

Задача 1. *Найти норму* $\|\ell_N^1\|$ *функционала погрешности* ℓ_N^1 *аппроксимационной формулы (1.1) в пространстве* $L_2^{(m)*}(0,1)$.

Понятно, что норма функционала погрешности ℓ_N^1 зависит от коэффициентов $C_\beta(z),\beta=0,1,...,N$, $A(z)$ и $B(z)$. Рассмотрим задачу минимизации величины $\|\ell_N^1\|$ по коэффициентам $C_\beta(z)$, $\beta=0,1,...,N$, $A(z)$ и $B(z)$.

Коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta(z),\beta=0,1,...,N$, $\overset{\circ}{A}(z)$ и $\overset{\circ}{B}(z)$ (если существуют), удовлетворяющие равенству

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}{}_N^1\,|\,L_2^{(m)*}\right\|=\inf_{C_\beta(z),A(z),B(z)}\left\|\ell_N^1\,|\,L_2^{(m)*}\right\|,\qquad(1.4)$$

называются *оптимальными коэффициентами*, соответствующая аппрокси- мационная формула

$$\overset{\circ}{P}_\varphi(z)=\sum_{\beta=0}^{N}\overset{\circ}{C}_\beta(z)\varphi(h\beta)+\overset{\circ}{A}(z)\varphi'(0)+\overset{\circ}{B}(z)\varphi'(1)$$

называется *формулой оптимального приближения,* а разность $\varphi-\overset{\circ}{P}_\varphi$ - *погрешностью формулы оптимального приближения* (1.1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Таким образом, для построения формулы оптимального приближения вида (1.1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ нужно решить следующую задачу.

Задача 2. *Найти коэффициенты* $\overset{\circ}{C}_\beta(z),\beta=0,1,...,N$, $\overset{\circ}{A}(z)$ *и* $\overset{\circ}{B}(z)$, *которые удовлетворяют равенству (1.4).*

Следует отметить, что впервые такая задача была поставлена и исследована С.Л. Соболевым в [1], где экстремальная функция интерполяционной формулы была найдена в пространстве $L_2^{(m)}$. Связь между интерполяционными формулами с производными и классическими квадратурными формулами Эйлера-Маклорена изучена в работах [2, 3, 4].

2. Экстремальная функция и норма функционала погрешности

В этом пункте находим явный вид нормы функционала погрешности ℓ^1_N, т.е. решаем задачу 1. Для нахождения явного вида нормы функционала ℓ^1_N в пространстве $L_2^{(m)}$, мы используем его экстремальную функцию [2, 5]. Тогда для нормы функционала погрешности ℓ^1_N, который однозначно определяется экстремальной функцией $\psi_{\ell^1_N}$, имеем

$$\left\|\ell^1_N \left| L_2^{(m)*}(0,1)\right\|^2 = (\ell^1_N, \psi_\ell) = \left(\ell^1_N(x), (-1)^m \ell^1_N(x) * G_m(x)\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ell^1_N(x) \left((-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \ell^1_N(y) G_m(x-y)dy \right) dx.$$

Таким образом, учитывая, что $G_m(x) = \dfrac{x^{2m-1} signx}{2(2m-1)!}$, является четной функцией, получаем

$$\left\|\ell^1_N \left| L_2^{(m)*}(0,1)\right\|^2 = (\ell^1_N, \psi_{\ell^1_N}) = (-1)^m \left[\sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} C_\beta(z) C_\gamma(z) \frac{|h\beta - h\gamma|^{2m-1}}{2(2m-1)!} - \right.$$

$$-2\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z) \frac{(z-h\beta)^{2m-1} \mathrm{sgn}(z-h\beta)}{2(2m-1)!} -$$

$$-2\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z) \left(A(z) \frac{(h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!} - B(z) \frac{(1-h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \right) +$$

$$\left. + A(z) \frac{z^{2m-2}}{(2m-2)!} - B(z) \frac{(1-z)^{2m-2}}{(2m-2)!} - \frac{A(z) \cdot B(z)}{(2m-3)!} \right]. \quad (1.5)$$

Таким образом, задача 1 решена.

Далее в следующих пунктах решаем задачу 2.

3. Система для коэффициентов оптимальных интерполяционных формул в пространстве Соболева

Функционал погрешности (1.3) удовлетворяет условиям $\left(\ell^1_N, x^\alpha\right) = 0$, $\alpha = 0,1,2,...,m-1$. Норма функционала погрешности ℓ^1_N является квадратичной многопеременной функцией коэффициентов $C_\beta(z), \beta = 0,1,...,N$, $A(z)$ и $B(z)$.

Для нахождения точки условного минимума выражения (1.5) при условиях $\left(\ell_N^1, x^\alpha\right)=0,\ \alpha=0,1,2,...,m-1$, применяем метод Лагранжа.

Рассмотрим функцию

$$\Psi(C_0(z),C_1(z),...,C_N(z),A(z),B(z),\lambda_0(z),...,\lambda_{m-1}(z))=$$
$$=\left\|\ell_N^1\right\|^2-2(-1)^m\sum_{\alpha=0}^{m-1}\lambda_\alpha(z)\left(\ell_N^1,x^\alpha\right).$$

Приравнивая к нулю частные производные функции Ψ по $C_\beta(z),\beta=0,1,...,N$, $A(z),B(z)$ и $\lambda_0(z),\lambda_1(z),...,\lambda_{m-1}(z)$, получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{|h\beta-h\gamma|^{2m-1}}{2(2m-1)!}-A(z)\frac{(h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!}+$$
$$+B(z)\frac{(h\beta-1)^{2m-2}}{2(2m-2)!}+\sum_{\alpha=0}^{m-1}\lambda_\alpha(z)(h\beta)^\alpha=\frac{|z-h\beta|^{2m-1}}{2(2m-1)!},\quad \beta=0,1,...,N, \tag{1.6}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{(h\gamma)^{2m-2}}{2(2m-2)!}+\frac{B(z)}{2(2m-3)!}-\lambda_1(z)=\frac{z^{2m-2}}{2(2m-2)!}, \tag{1.7}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{(h\gamma-1)^{2m-2}}{2(2m-2)!}-\frac{A(z)}{2(2m-3)!}+\sum_{\alpha=1}^{m-1}\alpha\lambda_\alpha(z)=\frac{(1-z)^{2m-2}}{2(2m-2)!}, \tag{1.8}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)=1, \tag{1.9}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)+A(z)+B(z)=z, \tag{1.10}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^\alpha+\alpha B(z)=z^\alpha,\ \alpha=2,3,...,m-1. \tag{1.11}$$

Система (1.6)-(1.11) называется *дискретной системой типа Винера-Хопфа* для оптимальных коэффициентов [5, 6]. В этой системе коэффициенты $C_\beta(z),\beta=0,1,...,N$, $A(z))$, $B(z)$ и $\lambda_\alpha(z)$, $\alpha=0,1,...,m-1$ неизвестны. Система (1.6)-(1.11) имеет единственное решение и это решение дает минимум $\left\|\ell_N^1\right\|^2$ при условиях (1.9)-(1.11), когда $N+3\geq m$. Здесь мы опускаем доказательство существования и единственности решения данной системы. Существование и единственность решения этой системы доказывается аналогично существованию и единственности решения дискретной системы типа Винера-Хопфа для коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ [7].

Следовательно, квадрат нормы функционала погрешности ℓ_N^1 является квадратичной функцией коэффициентов $C_\beta(z)$, $A(z)$ и $B(z)$ и имеет единственный минимум в конкретном $C_\beta(z) = \overset{\circ}{C}_\beta(z)$, $A(z) = \overset{\circ}{A}(z)$ и $B(z) = \overset{\circ}{B}(z)$.

Как было сказано выше, аппроксимационная формула (1.1) с коэффициентами $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$, $\overset{\circ}{A}(z)$ и $\overset{\circ}{B}(z)$, соответствующими этому минимуму, называется формулой *оптимального приближения, а* $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$, $\overset{\circ}{A}(z)$ и $\overset{\circ}{B}(z)$ - *оптимальными коэффициентами*.

Замечание 1. *Легко проверить, что для оптимальных коэффициентов* $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$, $\overset{\circ}{A}(z)$, $\overset{\circ}{B}(z)$ *и* $\overset{\circ}{\lambda}_\alpha(z)$ *верно следующее:*

$$\overset{\circ}{C}_\beta(h\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma = \beta, \\ 0, & \gamma \neq \beta, \end{cases} \quad \gamma = 0,1,\dots,N,\ \beta = 0,1,2,\dots,N,$$

$$\overset{\circ}{A}(h\beta) = 0,\ \overset{\circ}{B}(h\beta) = 0,\ \overset{\circ}{\lambda}_\alpha(h\beta) = 0,\ \beta = 0,1,\dots,N.$$

Тогда формула оптимального приближения (1.1) удовлетворяет следующим условиям интерполяции:

$$\varphi(h\beta) = \overset{\circ}{P}_\varphi(h\beta),\ \ \beta = 0,1,\dots,N.$$

Это означает, что формула оптимального приближения (1.1) является формулой интерполяции. Поэтому далее формулу оптимального приближения (1.1) будем называть *формулой оптимальной интерполяции* (1.1).

Замечание 2. *Следует отметить, что интегрируя обе стороны системы (1.6)-(1.11) по z от 0 до 1 , мы получаем систему (4.1)-(4.6) работы [8]. Это означает, что, интегрируя обе стороны приближенного равенства (1.1), мы получим оптимальные квадратурные формулы вида (1.4) работы [8]. В частности, при* $m = 2$ *мы получаем классические квадратурные формулы Эйлера-Маклорена. Это подтверждает результат о связи между интерполяционными формулами с производными и классическими квадратурными формулами Эйлера-Маклорена в работах [2-4] в случае* $m = 2$.

Систему (1.6)-(1.11) для коэффициентов оптимальной интерполяционной формулы (1.1) можно решить прямыми или итерационными методами. Но здесь мы используем метод, предложенный Соболевым для построения оптимальных квадратурных формул в пространстве $L_2^{(m)}$, который основан на дискретном аналоге дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m} [9]. Этот метод позволяет получить явные формулы для оптимальных коэффициентов и значительно уменьшает размер системы (1.6) - (1.11).

Далее, продемонстрируем этот метод в случае $m=2$. Перед этим дадим некоторые предварительные замечания.

4. Коэффициенты для оптимальных интерполяционных формул (1.1) в случае $m=2$

Приводим решение задачи 2 для случае $m=2$ и находим явные формулы для оптимальных коэффициентов $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$, $\beta=0,1,...,N,$ $\overset{\circ}{A}(z)$ и $\overset{\circ}{B}(z)$ оптимальной интерполяции формулы (1.1) с использованием дискретного аналога оператора d^{2m}/dx^{2m}.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Коэффициенты* $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$, $\beta=0,1,...,N$, $\overset{\circ}{A}(z)$ *и* $\overset{\circ}{B}(z)$ *оптимальной интерполяционной формулы (1.1) в пространстве* $L_2^{(2)}(0,1)$ *имеют следующий вид:*

$$\overset{\circ}{C}_0(z)=\frac{1}{2h^3}\Big[6\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}q^\gamma|z-h\gamma|^3+|z-h|^3+h^3-z^3(4+3\sqrt{3})+$$
$$+3z^2h(1-\sqrt{3})+q^N N_1(z)\Big],$$

(1.12)

$$\overset{\circ}{C}_\beta(z)=\frac{1}{2h^3}\Big[6\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}q^{|\beta-\gamma|}|z-h\gamma|^3+|z-h(\beta-1)|^3-8|z-h\beta|^3+$$
$$+|z-h(\beta+1)|^3+q^\beta M_1(z)+q^{N-\beta}N_1(z)\Big],\ \beta=1,2,...,N-1, \tag{1.13}$$

$$\overset{\circ}{C}_N(z)=\frac{1}{2h^3}\Big[6\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}q^{N-\gamma}|z-h\gamma|^3+|z-h(N-1)|^3+h^3-$$
$$-(1-z)^3(4+3\sqrt{3})+3h(1-z)^2(1-\sqrt{3})+q^N M_1(z)\Big], \tag{1.14}$$

$$\overset{\circ}{A}(z)=\frac{f_1(z)}{q(1-q^{2N})}, \tag{1.15}$$

$$\overset{\circ}{B}(z)=\frac{f_2(z)}{q(1-q^{2N})}, \tag{1.16}$$

где

$$M_1(z)=3z(z+h)(z-h-\sqrt{3}z)+6h^2\frac{f_1(z)}{q(1-q^{2N})},$$

$$N_1(z)=3(1-z)(1-z+h)(1-z-h-\sqrt{3}+\sqrt{3}z)-6h^2\frac{f_2(z)}{q(1-q^{2N})},$$

$$f_1(z)=\frac{1}{2h^2}\Big[2\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}(q^{\gamma+1}+q^{2N+1-\gamma})\,|z-h\gamma|^3+h^2zq(1-q^{2N})+$$
$$+hz^2(2q+1)(1+q^{2N})+z^3(q+1)+z^3q^{2N}(3q+1)+$$
$$+2h(1-z)^2(2q+1)q^N+(1-z)^3q^N(4q+2)\Big],$$
$$f_2(z)=-\frac{1}{2h^2}\Big[2\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}(q^{N-\gamma+1}+q^{N+1+\gamma})\,|z-h\gamma|^3+$$
$$+h^2(1-z)q(1-q^{2N})+h(1-z)^2(2q+1)(1+q^{2N})+(1-z)^3(q+1)+$$
$$+(1-z)^3q^{2N}(3q+1)+2hz^2(2q+1)q^N+z^3q^N(4q+2)\Big],$$
$$q=\sqrt{3}-2.$$

Доказательство теоремы 1. В случае $m=2$ из системы (1.6)-(1.11) имеем

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{|h\beta-h\gamma|^3}{12}-A(z)\frac{(h\beta)^2}{4}+B(z)\frac{(h\beta-1)^2}{4}+$$
$$+\lambda_1(z)(h\beta)+\lambda_0(z)=\frac{|z-h\beta|^3}{12},\ \ \beta=0,1,...,N, \tag{1.17}$$
$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^2+2B(z)-4\lambda_1(z)=z^2, \tag{1.18}$$
$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(1-h\gamma)^2-2A(z)+4\lambda_1(z)=(1-z)^2, \tag{1.19}$$
$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)=1, \tag{1.20}$$
$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)+A(z)+B(z)=z. \tag{1.21}$$

Используя (1.18), (1.20) и (1.21), из (1.18) получаем

$$\lambda_1(z)=0. \tag{1.22}$$

Тогда с учетом (1.22) систему (1.17)-(1.21) запишем следующим образом:

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{|h\beta-h\gamma|^3}{12}-A(z)\frac{(h\beta)^2}{4}+B(z)\frac{(h\beta-1)^2}{4}+$$
$$+\lambda_0(z)=\frac{|z-h\beta|^3}{12},\qquad \beta=0,1,...,N, \tag{1.23}$$
$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^2+2B(z)=z^2, \tag{1.24}$$
$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)=1, \tag{1.25}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)(h\gamma) + A(z) + B(z) = z. \qquad (1.26)$$

Далее решаем систему (1.23)-(1.26).

Введем следующие обозначения:

$$v_2(h\beta) = \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)\frac{|h\beta - h\gamma|^3}{12}, \qquad (1.27)$$

$$u_2(h\beta) = v(h\beta) - A(z)\frac{(h\beta)^2}{4} + B(z)\frac{(h\beta-1)^2}{4} + \lambda_0(z). \qquad (1.28)$$

Теперь можем выразить коэффициенты $C_\beta(z)$, $\beta = 0,1,...,N$ с помощью функции $u_2(h\beta)$. Для этого используем дискретный аналог $D_2(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^4}{dx^4}$, который удовлетворяет уравнению

$$hD_2(h\beta) * \frac{|h\beta|^3}{12} = \delta_d(h\beta),$$

где $\delta_d(h\beta)$ - дискретная дельта-функция.

Из [10] в случае $m = 2$ получаем следующее:

$$D_2(h\beta) = \frac{6}{h^4}\begin{cases} 6\sqrt{3}q^{|\beta|} & \text{при} \quad |\beta| \geq 2, \\ 19 - 12\sqrt{3} & \text{при} \quad |\beta| = 1, \\ 6\sqrt{3} - 8 & \text{при} \quad \beta = 0, \end{cases} \qquad (1.29)$$

где $q = \sqrt{3} - 2$.

Используя равенство (1.5) и дискретный аналог (1.29) для коэффициентов $C_\beta(z)$, $\beta = 0,1,...,N$, оптимальной интерполяционной формулы (1.1), получаем равенство

$$C_\beta(z) = hD_2(h\beta) * u_2(h\beta). \qquad (1.30)$$

Отсюда заключаем, что если мы найдем функцию $u_2(h\beta)$, то коэффициенты $C_\beta(z)$, $\beta = 0,1,...,N$, формулы (1.1) будут найдены из (1.30).

Теперь находим явное представление функции $u_2(h\beta)$. Так как $C_\beta(z) = 0$ для $h\beta \notin [0,1]$, то из (1.30) получаем

$$C_\beta(z) = hD_2(h\beta) * u_2(h\beta) = 0 \quad \text{для} \quad h\beta \notin [0,1].$$

Теперь остается определить функцию $u_2(h\beta)$ при $\beta < 0$ и $\beta > N$.

Так как $C_\beta(z) = hD_2(h\beta) * u_2(h\beta)$ при $\beta < 0$, $\beta > N$, $C_\beta(z) = 0$ имеем следующее равенство:

$$D_2(h\beta) * u_2(h\beta) = 0 \text{ при } \beta < 0 \text{ и } \beta > N.$$

Рассмотрим функцию $v_2(h\beta)$ при $\beta<0$ и $\beta>N$. Из (1.27) при $\beta\le 0$ имеем

$$u_2(h\beta)=\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\frac{|h\beta-h\gamma|^3}{12}=-\frac{1}{12}\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)\left(h\beta-h\gamma\right)^3=$$

$$=-\frac{1}{12}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\beta)^3-3(h\beta)^2\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)+\right.$$

$$\left.+3(h\beta)\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^2-\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3\right)=$$

$$=-\frac{1}{12}\left((h\beta)^3-3(h\beta)^2(z-A(z)-B(z))+3(h\beta)(z^2-2B(z))-\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3\right).$$

Таким образом,

$$v_2(h\beta)=-\frac{1}{12}\Big((h\beta)^3-3(h\beta)^2(z-A(z)-B(z))+$$

$$\left.+3(h\beta)(z^2-2B(z))-\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3\right),\qquad \beta\le 0,\qquad (1.31)$$

$$v_2(h\beta)=-\frac{1}{12}\Big((h\beta)^3-3(h\beta)^2(z-A(z)-B(z))+$$

$$+3(h\beta)(z^2-2B(z))-\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3\Big),\qquad \beta\ge N.\qquad (1.32)$$

Учитывая (1.31) и (1.32), из (1.28) при $\beta\le 0$ имеем

$$u_2(h\beta)=-\frac{1}{12}(h\beta)^3+\frac{1}{4}(h\beta)^2(z-A(z)-B(z))+\frac{1}{4}(h\beta)(z^2-2B(z))+$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3-\frac{A(z)}{4}(h\beta)^2+\frac{B(z)}{4}(1-h\beta)^2+\lambda_0(z)=$$

$$=-\frac{1}{12}(h\beta)^3+\frac{1}{4}(h\beta)^2z-\frac{1}{4}(h\beta)z^2+\frac{1}{12}\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3+\lambda_0(z)-$$

$$-\frac{A(z)}{2}(h\beta)^2+\frac{B(z)}{4}\left[-(h\beta)^2+2(h\beta)+1-2(h\beta)+(h\beta)^2\right].$$

Значит, при $\beta\le 0$ получаем

$$u_2(h\beta)=-\frac{1}{12}(h\beta)^3+\frac{1}{4}(h\beta)^2 z-\frac{1}{4}(h\beta)z^2+\frac{1}{12}\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3+$$
$$+\lambda_0(z)-\frac{A(z)}{2}(h\beta)^2+\frac{1}{4}B(z). \qquad (1.33)$$

При $\beta \geq N$

$$u_2(h\beta)=\frac{1}{12}(h\beta)^3-\frac{1}{4}(h\beta)^2(z-A(z)-B(z))+\frac{1}{4}(h\beta)(z^2-2B(z))-$$
$$-\frac{1}{12}\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3-\frac{A(z)}{4}(h\beta)^2+\frac{B(z)}{4}(1-h\beta)^2+\lambda_0(z)=$$
$$=\frac{1}{12}(h\beta)^3-\frac{1}{4}(h\beta)^2 z+\frac{1}{4}(h\beta)z^2-\frac{1}{12}\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3+\lambda_0(z)+$$
$$+\frac{B(z)}{4}\left[(h\beta)^2-2(h\beta)+1-2(h\beta)+(h\beta)^2\right].$$

Отсюда при $\beta \geq N$ получаем

$$u_2(h\beta)=\frac{1}{12}(h\beta)^3-\frac{1}{4}(h\beta)^2 z+\frac{1}{4}(h\beta)z^2-\frac{1}{12}\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3+\lambda_0(z)+$$
$$+\frac{B(z)}{4}\left[2(h\beta)^2-4(h\beta)+1\right].$$

(3.34)

Имея в виду (1.33) и (3.34), а также (1.23), для $u_2(h\beta)$ получаем

$$u_2(h\beta)=\begin{cases}-\frac{(h\beta)^3}{12}+\frac{(h\beta)^2}{4}z-\frac{(h\beta)}{4}z^2+\frac{1}{12}\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3+ & \\ +\lambda_0(z)-\frac{A(z)}{2}(h\beta)^2+\frac{B(z)}{4}, & \beta\leq 0,\\ \frac{|z-h\beta|^3}{12}, \quad \beta=0,1,2,\ldots,N, & \\ \frac{(h\beta)^3}{12}-\frac{(h\beta)^2}{4}z+\frac{(h\beta)}{4}z^2-\frac{1}{12}\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)(h\gamma)^3+ & \\ +\lambda_0(z)+\frac{B(z)}{4}\left[2(h\beta)^2-4(h\beta)+1\right], & \beta\geq N.\end{cases} \qquad (1.35)$$

В (1.35) введем следующие обозначения:

$$r_0^- = \lambda_0(z) + \frac{1}{12}\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)(h\gamma)^3, \qquad (1.36)$$

$$r_0^+ = \lambda_0(z) - \frac{1}{12}\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)(h\gamma)^3, \qquad (1.37)$$

где

$$\lambda_0(z) = \frac{1}{2}(r_0^+ + r_0^-), \qquad \frac{1}{12}\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)(h\beta)^3 = \frac{1}{2}(r_0^- - r_0^+). \qquad (1.38)$$

Теперь из (1.35) рассмотрим случаи $\beta = 0$ и $\beta = N$.

При $\beta = 0$

$$r_0^- = \frac{z^3}{12} - \frac{1}{4}B(z), \qquad (1.39)$$

При $\beta = N$

$$r_0^+ = \frac{1}{4}B(z) - \frac{z^3}{12}, \qquad (1.40)$$

Используя (1.39) и (1.40), получаем

$$\lambda_0(z) = \frac{1}{2}(r_0^+ + r_0^-) = 0\ , \qquad (1.41)$$

$$u_2(h\beta) = \begin{cases} -\dfrac{(h\beta)^3}{12} + \dfrac{(h\beta)^2}{4}z - \dfrac{(h\beta)}{4}z^2 + r_0^- - \dfrac{A(z)}{2}(h\beta)^2 + \dfrac{B(z)}{4}, & \beta \le 0, \\ \dfrac{|z - h\beta|^3}{12}, \quad \beta = 0,1,2,\dots,N, & \\ \dfrac{(h\beta)^3}{12} - \dfrac{(h\beta)^2}{4}z + \dfrac{(h\beta)}{4}z^2 + r_0^+ + \dfrac{B(z)}{4}\left[2(h\beta)^2 - 4(h\beta) + 1\right], & \beta \ge N. \end{cases} \qquad (1.42)$$

Имея в виду (1.39), (1.40), из (1.42) получаем

$$u_2(h\beta)=\begin{cases}-\dfrac{(h\beta)^3}{12}+\dfrac{(h\beta)^2}{4}z-\dfrac{(h\beta)}{4}z^2+\dfrac{1}{12}z^3-\dfrac{A(z)}{2}(h\beta)^2, & \beta\le 0,\\ \dfrac{|z-h\beta|^3}{12}, & \beta=0,1,2,...,N,\\ \dfrac{(h\beta)^3}{12}-\dfrac{(h\beta)^2}{4}z+\dfrac{(h\beta)}{4}z^2-\dfrac{1}{12}z^3+\dfrac{B(z)}{2}((h\beta)-1)^2, & \beta\ge N.\end{cases} \quad (1.43)$$

Здесь неизвестными являются $A(z)$ и $B(z)$.

Теперь, используя уравнение $D_2(h\beta)*u_2(h\beta)=0$, находим неизвестные $A(z)$ и $B(z)$:

$$D_2(h\beta)*u_2(h\beta)=$$

$$=\sum_{\gamma=-\infty}^{-1}D_2(h\beta-h\gamma)\left[-\frac{(h\gamma)^3}{12}+\frac{(h\gamma)^2}{4}z-\frac{(h\gamma)}{4}z^2+\frac{1}{12}z^3-\frac{A(z)}{2}(h\gamma)^2\right]+$$

$$+\sum_{\gamma=0}^{N}D_2(h\beta-h\gamma)\frac{|z-h\gamma|^3}{12}+$$

$$+\sum_{\gamma=N+1}^{\infty}D_2(h\beta-h\gamma)\left[\frac{(h\gamma)^3}{12}-\frac{(h\gamma)^2}{4}z+\frac{(h\gamma)}{4}z^2-\frac{1}{12}z^3+\frac{B}{2}(h\gamma-1)^2\right]=$$

$$=\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\beta+h\gamma)\left[\frac{(h\gamma)^3}{12}+\frac{(h\gamma)^2}{4}z+\frac{(h\gamma)}{4}z^2+\frac{1}{12}z^3-\frac{A}{2}(h\gamma)^2\right]+$$

$$+\sum_{\gamma=0}^{N}D_2(h\beta-h\gamma)\frac{|z-h\gamma|^3}{12}+$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma)-h\beta)\left[\frac{(h\gamma)^3}{12}+\frac{(h\gamma)^2}{4}(1-z)+\frac{(h\gamma)}{4}(1-z)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12}(1-z)^3+\frac{B}{2}(h\gamma)^2\right]=0.$$

Из последнего равенства получаем

$$A(z)\left[-\frac{h^2}{2}\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma+h\beta)\gamma^2\right]+B(z)\left[\frac{h^2}{2}\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma)-h\beta)\gamma^2\right]=$$

$$=-\sum_{\gamma=0}^{N} D_2(h\gamma-h\beta)\frac{|z-h\gamma|^3}{12}-$$

$$-\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2(h\gamma+h\beta)\left[\frac{(h\gamma)^3}{12}+\frac{(h\gamma)^2}{4}z+\frac{(h\gamma)}{4}z^2+\frac{1}{12}z^3\right]-$$

$$-\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2(h(N+\gamma)-h\beta)\left[\frac{(h\gamma)^3}{12}+\frac{(h\gamma)^2}{4}(1-z)+\frac{(h\gamma)}{4}(1-z)^2+\frac{1}{12}(1-z)^3\right].$$

(1.44)

Отсюда при $\beta=-1$ и $\beta=N+1$ имеем

$$\beta=-1,$$

$$A(z)\left[-\frac{h^2}{2}\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2(h\gamma-h)\gamma^2\right]+B(z)\left[\frac{h^2}{2}\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2(h(N+\gamma+1))\gamma^2\right]=$$

$$=-\sum_{\gamma=0}^{N} D_2(h\gamma+h)\frac{|z-h\gamma|^3}{12}-$$

$$-\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2(h\gamma-h)\left[\frac{h^3}{12}\gamma^3+\frac{h^2}{4}z\gamma^2+\frac{h}{4}z^2\gamma+\frac{1}{12}z^3\right]-$$

$$-\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2(h(N+\gamma+1))\left[\frac{h^3}{12}\gamma^3+\frac{h^2}{4}(1-z)\gamma^2+\frac{h}{4}(1-z)^2\gamma+\frac{1}{12}(1-z)^3\right]. \qquad (1.45)$$

Здесь вводим следующие обозначения:

$$M_{1\alpha}=\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2(h\gamma-h)\gamma^{\alpha},\ N_{1\alpha}=\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2(h(N+\gamma+1)\gamma^{\alpha},\quad \alpha=0,1,2,3 \qquad (1.46)$$

при $\beta=N+1$:

$$A(z)\left[-\frac{h^2}{2}\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2(h(N+\gamma+1))\gamma^2\right]+B(z)\left[\frac{h^2}{2}\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2(h\gamma-h)\gamma^2\right]=$$

$$=-\sum_{\gamma=0}^{N} D_2(h(N+1-\gamma))\frac{|z-h\gamma|^3}{12}-$$

$$-\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2(h(N+\gamma+1))\left[\frac{h^3}{12}\gamma^3+\frac{h^2}{4}z\gamma^2+\frac{h}{4}z^2\gamma+\frac{1}{12}z^3\right]-$$

$$-\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2(h\gamma-h)\left[\frac{h^3}{12}\gamma^3+\frac{h^2}{4}(1-z)\gamma^2+\frac{h}{4}(1-z)^2\gamma+\frac{1}{12}(1-z)^3\right]. \quad (1.47)$$

Учитывая (1.46) из (1.45) и (1.47), имеем

$$A(z)\left[-\frac{h^2}{2}M_{12}\right]+B(z)\left[\frac{h^2}{2}N_{12}\right]=$$

$$=-\sum_{\gamma=0}^{N} D(h\gamma+h)\frac{|z-h\gamma|^3}{12}-\left[\frac{h^3}{12}M_{13}+\frac{h^2}{4}zM_{12}+\frac{h}{4}z^2M_{11}+\frac{1}{12}z^3M_{10}\right]-$$

$$-\left[\frac{h^3}{12}N_{13}+\frac{h^2}{4}(1-z)N_{12}+\frac{h}{4}(1-z)^2N_{11}+\frac{1}{12}(1-z)^3N_{10}\right], \quad (1.48)$$

$$A(z)\left[-\frac{h^2}{2}N_{12}\right]+B(z)\left[\frac{h^2}{2}M_{12}\right]=$$

$$=-\sum_{\gamma=0}^{N} D(h(N+1-\gamma))\frac{|z-h\gamma|^3}{12}-\left[\frac{h^3}{12}N_{13}+\frac{h^2}{4}zN_{12}+\frac{h}{4}z^2N_{11}+\frac{1}{12}z^3N_{10}\right]-$$

$$-\left[\frac{h^3}{12}M_{13}+\frac{h^2}{4}(1-z)M_{12}+\frac{h}{4}(1-z)^2M_{11}+\frac{1}{12}(1-z)^3M_{10}\right]. \quad (1.49)$$

Теперь, вычисляя $M_{1\alpha}$, $N_{1\alpha}$, $\alpha=0,1,2,3$, из (1.46) и используя оператор $D_2(h\beta)$, после некоторых упрощений из (1.48)-(1.49) получаем

$$A(z)\left[-\frac{h^2}{2}q\right]+B(z)\left[\frac{h^2}{2}q^{N+1}\right]=$$

$$=-\sum_{\gamma=0}^{N} D_2(h\gamma+h)\frac{|z-h\gamma|^3}{12}-\left[\frac{h^2}{4}zq+\frac{h}{4}z^2(2q+1)+\frac{1}{12}z^3(3q+2)\right]-$$

$$-\left[\frac{h^2}{4}(1-z)q^{N+1}+\frac{h}{4}(1-z)^2(2q+1)q^N+\frac{1}{4}(1-z)^3(3q+1)q^N\right], \quad (1.50)$$

$$A(z)\left[-\frac{h^2}{2}q^{N+1}\right]+B(z)\left[\frac{h^2}{2}q\right]=$$

$$= -\sum_{\gamma=0}^{N} D_2(h(N+1-\gamma))\frac{|z-h\gamma|^3}{12} - \left[\frac{h^2}{4}zq^{N+1} + \frac{h}{4}z^2(2q+1)q^N + \frac{1}{4}z^3(3q+1)q^N\right] -$$

$$-\left[\frac{h^2}{4}(1-z)q + \frac{h}{4}(1-z)^2(2q+1) + \frac{1}{12}(1-z)^3(3q+2)\right]. \quad (1.51)$$

Из равенств (1.50) и (1.51) имеем следующую систему:

$$\begin{cases} A(z)q + B(z)q^{N+1} = f_1(z), \\ A(z)q^{N+1} + B(z)q = f_1(z). \end{cases} \quad (1.52)$$

Из системы (1.52) получаем следующие результаты для $A(z)$ и $B(z)$:

$$A(z) = \frac{f_2(z) - f_1(z)q^N}{1-q^{2N}}, \qquad B(z) = \frac{f_1(z) - f_2(z)q^N}{1-q^{2N}}\ ; \quad (1.53)$$

здесь

$$f_1(z) = 2h^{-2}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} D_2(h\gamma + h)\frac{|z-h\gamma|^3}{12} + \left[\frac{h^2}{4}zq + \frac{h}{4}z^2(2q+1) + \frac{1}{12}z^3(3q+2)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{h^2}{4}(1-z)q^{N+1} + \frac{h}{4}(1-z)^2(2q+1)q^N + \frac{1}{4}(1-z)^3(3q+1)q^N\right]\right],$$

$$f_2(z) = 2h^{-2}\left[-\sum_{\gamma=0}^{N} D_2(h(N+1-\gamma))\frac{|z-h\gamma|^3}{12} - \right.$$

$$-\left[\frac{h^2}{4}zq^{N+1} + \frac{h}{4}z^2(2q+1)q^N + \frac{1}{4}z^3(3q+1)q^N\right] -$$

$$\left. -\left[\frac{h^2}{4}(1-z)q + \frac{h}{4}(1-z)^2(2q+1) + \frac{1}{12}(1-z)^3(3q+2)\right]\right].$$

Теперь, учитывая, что $C_\beta(z) = hD_2(h\beta) * u_2(h\beta)$, получаем аналитические выражения для коэффициентов $C_\beta(z)$. При этом используем $D_2(h\beta)$. Тогда из (1.43) имеем

$$u_2(h\beta)=\begin{cases}\frac{1}{12}(z-h\beta)^3-\frac{A(z)}{2}(h\beta)^2, & \beta\le 0,\\ \frac{|z-h\beta|^3}{12}, & \beta=0,1,2,\dots,N,\\ -\frac{1}{12}(z-h\beta)^3+\frac{B(z)}{2}((h\beta)-1)^2, & \beta\ge N.\end{cases} \quad (1.54)$$

В этом случае

$$C_\beta=h\Bigg[\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\beta+h\gamma)\left[\frac{1}{12}(z+h\gamma)^3-\frac{6A(z)}{12}(h\gamma)^2\right]+ \\ +\sum_{\gamma=0}^{N}D_2(h\gamma-h\beta)\frac{|z-h\gamma|^3}{12}+ \\ +\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma)-h\beta)\left[\frac{1}{12}(h\gamma+1-z)^3+\frac{6B(z)}{12}(h\gamma)^2\right]\Bigg],\quad \beta=\overline{0,N}. \quad (1.55)$$

Вначале вычислим следующую сумму:

$$T=\sum_{\gamma=0}^{N}D_2(h\gamma-h\beta)\frac{|z-h\gamma|^3}{12}=\sum_{\gamma=0}^{\beta-2}D_2(h\beta-h\gamma)\frac{|z-h\gamma|^3}{12}+D_2(h)\frac{|z-h(\beta-1)|^3}{12}+$$

$$+D_2(0)\frac{|z-h\beta|^3}{12}+D_2(h)\frac{|z-h(\beta+1)|^3}{12}+\sum_{\gamma=\beta+2}^{N}D_2(h\gamma-h\beta)\frac{|z-h\gamma|^3}{12}=$$

$$=p\sum_{\gamma=0}^{\beta-2}A_1q^{\beta-\gamma-1}\frac{|z-h\gamma|^3}{12}+p(1+A_1)\frac{|z-h(\beta-1)|^3}{12}+p(C+\frac{A_1}{q})\frac{|z-h\beta|^3}{12}+$$

$$+p(1+A_1)\frac{|z-h(\beta+1)|^3}{12}+p\sum_{\gamma=\beta+2}^{N}A_1q^{\gamma-\beta-1}\frac{|z-h\gamma|^3}{12}.$$

Отсюда

$$T=\frac{p}{12}\left[|z-h(\beta-1)|^3+C|z-h\beta|^3+|z-h(\beta+1)|^3+\frac{A_1}{q}\sum_{\gamma=0}^{N}q^{|\beta-\gamma|}|z-h\gamma|^3\right]. \quad (1.56)$$

Пользуясь (1.56), из (1.55) имеем

$$C_\beta(z)=\frac{hp}{12}\Bigg[|z-h(\beta-1)|^3+C|z-h\beta|^3+|z-h(\beta+1)|^3+\frac{A_1}{q}\sum_{\gamma=0}^{N}q^{|\beta-\gamma|}|z-h\gamma|^3+$$

$$+\frac{A_1}{q}q^\beta\sum_{\gamma=1}^{\infty}q^\gamma\left((z-h\gamma)^3-6A(z)(h\gamma)^2\right)+$$

$$+\frac{A_1}{q}q^{N-\beta}\sum_{\gamma=1}^{\infty}q^\gamma\left((h\gamma+1-z)^3-6B(z)(h\gamma)^2\right)\Bigg],\ \ 1\le\beta\le N-1. \qquad (1.57)$$

Теперь, используя (1.55), находим $C_0(z)$:

$$C_0(z)=h\Bigg[\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma)\left[\frac{1}{12}(z+h\gamma)^3-\frac{6A(z)}{12}(h\gamma)^2\right]+$$

$$+\sum_{\gamma=0}^{N}D_2(h\gamma)\frac{|z-h\gamma|^3}{12}+$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma))\left[\frac{1}{12}(h\gamma+1-z)^3+\frac{6B(z)}{12}(h\gamma)^2\right]\Bigg]=$$

$$=h\Bigg[D_2(0)\frac{z^3}{12}+D_2(h)\frac{|z-h|^3}{12}+\sum_{\gamma=2}^{N}D_2(h\gamma)\frac{|z-h\gamma|^3}{12}+$$

$$+D_2(h)\left[\frac{1}{12}(z+h)^3-\frac{6A(z)}{12}(h)^2\right]+\sum_{\gamma=2}^{\infty}D_2(h\gamma)\left[\frac{1}{12}(z+h\gamma)^3-\frac{6A(z)}{12}(h\gamma)^2\right]+$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma))\left[\frac{1}{12}(h\gamma+1-z)^3+\frac{6B(z)}{12}(h\gamma)^2\right]\Bigg]=$$

$$=\frac{hp}{12}\Bigg[Cz^3+|z-h|^3+\sum_{\gamma=0}^{N}\frac{A_1}{q}q^\gamma|z-h\gamma|^3+(z+h)^3-6A(z)h^2+$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{N}\frac{A_1}{q}q^\gamma\left((z+h\gamma)^3-6A(z)(h\gamma)^2\right)+\sum_{\gamma=1}^{N}\frac{A_1}{q}q^{N+\gamma}\left((h\gamma+1-z)^3+6B(z)(h\gamma)^2\right)\Bigg].$$

Отсюда

$$C_0(z)=\frac{hp}{12}\left[Cz^3+|z-h|^3+(z+h)^3-6A(z)h^2+\frac{A_1}{q}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}q^{\gamma}|z-h\gamma|^3+\right.\right.$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{N}q^{\gamma}\left((z+h\gamma)^3-6A(z)(h\gamma)^2\right)+$$

$$\left.\left.+q^N\sum_{\gamma=1}^{N}q^{\gamma}\left((h\gamma+1-z)^3+6B(z)(h\gamma)^2\right)\right)\right]. \qquad (1.58)$$

Теперь из (1.55) находим $C_N(z)$:

$$C_N(z)=h\left[\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma))\left[\frac{1}{12}(z+h\gamma)^3-\frac{6A(z)}{12}(h\gamma)^2\right]+\right.$$

$$+\sum_{\gamma=0}^{N}D_2(hN-h\gamma)\frac{|z-h\gamma|^3}{12}+$$

$$\left.+\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma)\left[\frac{1}{12}(h\gamma+1-z)^3+\frac{6B(z)}{12}(h\gamma)^2\right]\right].$$

Отсюда

$$C_N(z)=\frac{hp}{12}\left[C(1-z)^3+|z-h(N-1)|^3+(h+1-z)^3+6B(z)h^2+\right.$$

$$+\frac{A_1}{q}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}q^{N-\gamma}|z-h\gamma|^3+q^N\sum_{\gamma=1}^{N}q^{\gamma}\left((z+h\gamma)^3-6A(z)(h\gamma)^2\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{\gamma=1}^{N}q^{\gamma}\left((h\gamma+1-z)^3+6B(z)(h\gamma)^2\right)\right)\right]. \qquad (1.59)$$

Здесь введем следующие обозначения:

$$M_1=\sum_{\gamma=1}^{N}q^{\gamma}\left((z+h\gamma)^3-6A(z)(h\gamma)^2\right),$$

(1.60)

$$N_1=\sum_{\gamma=1}^{N}q^{\gamma}\left((h\gamma+1-z)^3+6B(z)(h\gamma)^2\right).$$

(1.61)

Теперь, учитывая, что $q=\sqrt{3}-2$ является корнем уравнения $q^2+4q+1=0$, из (1.60) и (1.61) имеем

$$M_1=\sum_{\gamma=1}^{N} q^{\gamma}\left((z+h\gamma)^3-6A(z)(h\gamma)^2\right)=$$

$$=\sum_{\gamma=1}^{N} q^{\gamma}\left(z^3+3z^2h\gamma+3z(h\gamma)^2+(h\gamma)^3-6A(z)(h\gamma)^2\right)=$$

$$=z^3\frac{\sqrt{3}-3}{6}+3z^2h(-\frac{1}{6})+3zh^2(-\frac{\sqrt{3}}{18})-6A(z)h^2(-\frac{\sqrt{3}}{18})=$$

$$=\frac{q-1}{6}z^3-\frac{1}{2}z^2h-\frac{\sqrt{3}}{6}zh^2+\frac{\sqrt{3}}{3}A(z)h^2, \qquad (1.62)$$

$$N_1=\sum_{\gamma=1}^{N} q^{\gamma}\left((h\gamma+1-z)^3+6B(z)(h\gamma)^2\right)=$$

$$=\sum_{\gamma=1}^{N} q^{\gamma}\left((h\gamma)^3+3(h\gamma)^2(1-z)+3(h\gamma)(1-z)^2+(1-z)^3+6B(z)(h\gamma)^2\right)=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{6}(1-z)h^2-\frac{1}{2}(1-z)^2h+\frac{\sqrt{3}-3}{6}(1-z)^3-\frac{\sqrt{3}}{3}B(z)h^2=$$

$$=\frac{q-1}{6}(1-z)^3-\frac{1}{2}(1-z)^2h-\frac{q+2}{6}(1-z)h^2-\frac{q+2}{3}B(z)h^2. \qquad (1.63)$$

Таким образом, используя (1.57)-(1.63) для коэффициентов $C_0(z)$, $C_N(z)$, $C_\beta(z)$, $\beta=\overline{1,N-1}$, получаем

$$C_0(z)=\frac{1}{2h^3}\Bigg[-8z^3+|z-h|^3+(z+h)^3-6A(z)h^2+$$

$$+6\sqrt{3}\left(\sum_{\gamma=0}^{N} q^{\gamma}|z-h\gamma|^3+M_1+N_1q^N\right)\Bigg],$$

$$C_\beta(z)=\frac{1}{2h^3}\Bigg[|z-h(\beta-1)|^3-8|z-h\beta|^3+|z-h(\beta+1)|^3+$$

$$+6\sqrt{3}\left(\sum_{\gamma=0}^{N} q^{|\beta-\gamma|}|z-h\gamma|^3+M_1q^{\beta}+N_1q^{N-\beta}\right)\Bigg], \qquad \beta=\overline{1,N-1},$$

$$C_N(z)=\frac{1}{2h^3}\Big[|z-h(N-1)|^3-8|z-1|^3+(h+1-z)^3+6B(z)h^2+$$

$$+6\sqrt{3}\left(\sum_{\gamma=0}^{N} q^{N-\gamma}\left|z-h\gamma\right|^{3}+M_1q^{N}+N_1\right).$$

Теорема 1. полностью Доказано

5 Численные результаты

Приводим некоторые численные результаты, используя теорему 1.

Рассмотрим случаи $m=2$ и $N=5$. При этом оптимальная интерполяционная формула (1.1) имеет вид

$$\varphi(z)\cong P_{\varphi}(z)=\sum_{\beta=0}^{5}\overset{\circ}{C}_{\beta}(z)\varphi(0.2\beta)+\overset{\circ}{A}(z)\varphi'(0)+\overset{\circ}{B}(z)\varphi'(1). \tag{1.64}$$

Оптимальные коэффициенты $\overset{\circ}{C}_{\beta}(z)$, $\beta=\overline{0,5}$ и $\overset{\circ}{A}(z)$, $\overset{\circ}{B}(z)$ определяются, как в (1.12)-(1.16). Графики этих коэффициентов представлены на рис. 1, откуда видно, что для $\gamma=0,1,...,5$

$$\overset{\circ}{C}_{\beta}(0.2\gamma)=\begin{cases}1, & \gamma=\beta,\\ 0, & \gamma\neq\beta,\end{cases}\qquad \beta=0,1,2,...,5,$$

$$\overset{\circ}{A}(0.2\gamma)=0,$$

$$\overset{\circ}{B}(0.2\gamma)=0.$$

Интегрируя обе стороны (1.64) по z от 0 до 1 , получаем соответствующую квадратурную формулу Эйлера-Маклорена.

В числовых примерах рассматриваем функции $\varphi_1(z)=\sin z$ и $\varphi_2(z)=z^4$, так как оптимальная интерполяция формулы (1.1) в случае $m=2$ является точной для полиномов $1, z, z^2$ и z^3 . Обозначаем соответствующие оптимальные интерполяционные формулы (1.1) для $\overset{\circ}{P}_{\varphi_1}(z)$ и $\overset{\circ}{P}_{\varphi_2}(z)$ соответственно.

Графики соответствующих абсолютных ошибок для случаев $N=5$ и $N=10$ приведены на рис. 2 и 3. Согласно этим результатам, ошибки оптимальной интерполяционной формулы (1.1) уменьшаются с увеличением N .

На рис. 1- 3 представлены некоторые численные результаты.

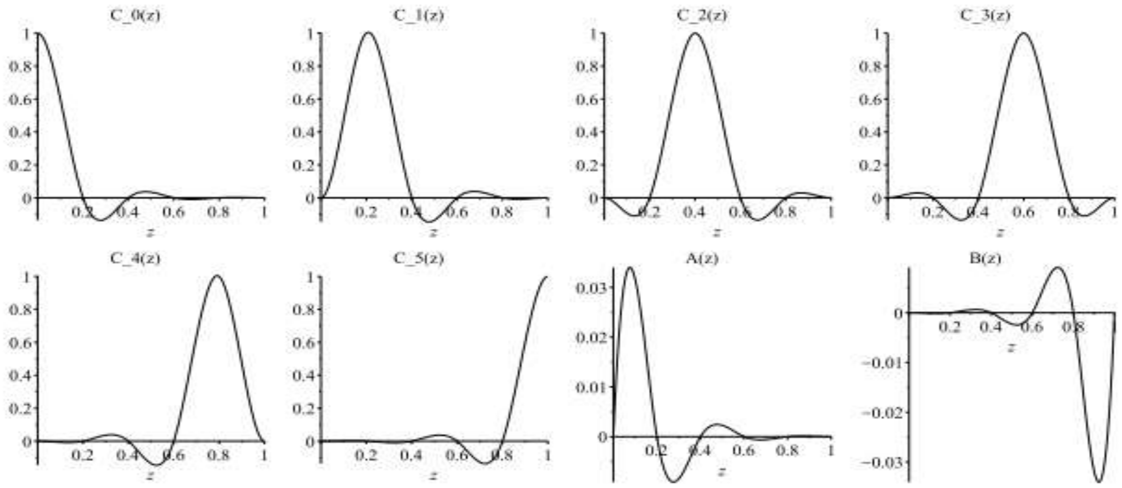

Рис. 1. Графики оптимальных коэффициентов $\overset{\circ}{C}_{\beta}(z)$, $\beta=\overline{0,5}$ и $\overset{\circ}{A}(z)$, $\overset{\circ}{B}(z)$ оптимальной интерполяционной формулы (1.64).

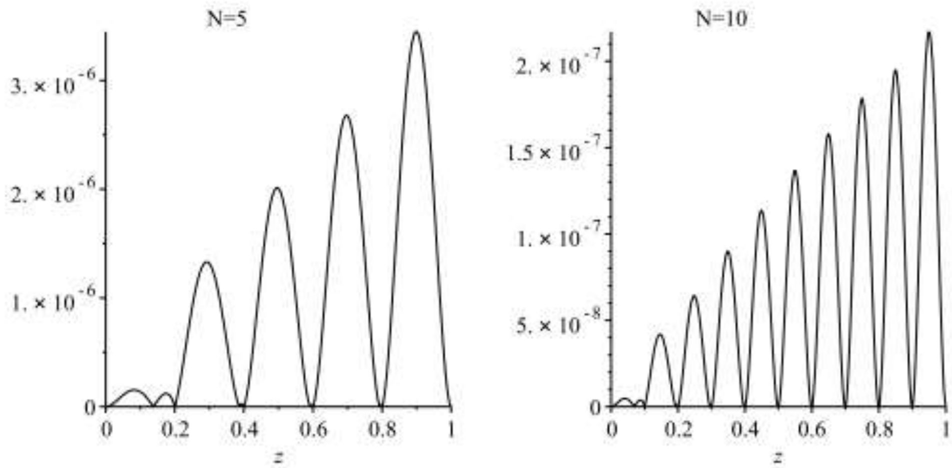

Рис. 2. Графики абсолютных ошибок $\left|\varphi_1(z)-\overset{\circ}{P}_{\varphi_1}(z)\right|$ для случаев $N=5$ и $N=10$.

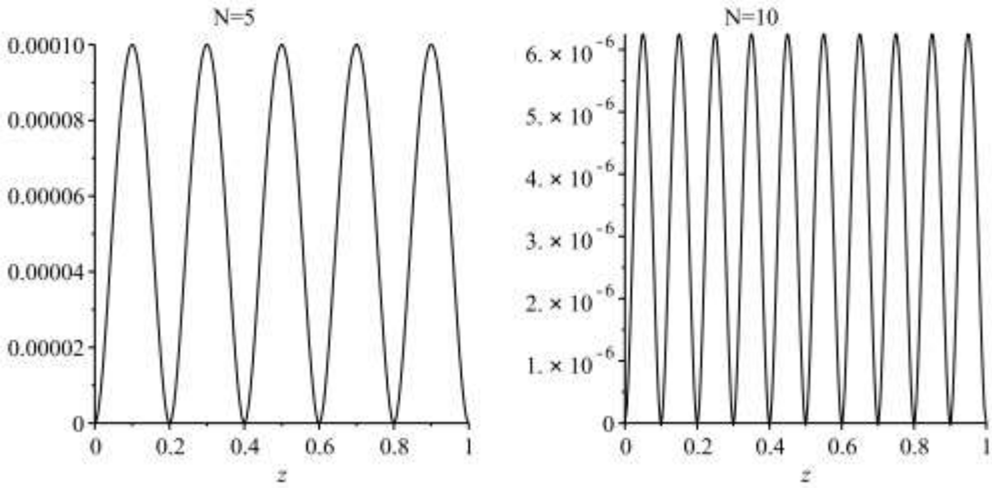

Рис. 3. Графики абсолютных ошибок $\left|\varphi_2(z)-\overset{\circ}{P}_{\varphi_2}(z)\right|$ для случаев $N=5$ и $N=10$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sobolev S.L. On interpolation of functions of n variables, in: Selected works of S.L. Sobolev. - Springer US, (2006). – pp. 451-456.
2. Schoenberg I.J., On equadistant cubic spline interpolation, Bulletin of the American Mathematical Sociaty 77 (1971). – pp. 1039-1044.
3. Schoenberg I.J., Cardinal spline interpolation, SIAM, Philadelphia, 1973.
4. Udoviˇci´c Z., Barrera D. A second look at the interpolatory background of the Euler-Macalurin quadrature formula. - Applied Mathematics and Computation 220 (2013). – pp. 608-615.
5. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. - 808 с.
6. Sobolev S.L., Vaskevich V.L. The theory of cubature formulas, Kluwer Academic Publishers Group. - Dordrecht, 1997.
7. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A. Optimal quadrature formulas of Euler Maclaurin type// Applied Mathematics and Computation. – 2016. – 276. – pp. 340-355.
8. Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A. Optimal formulas of numerical integration with derivatives in Sobolev space // Journal of Siberian Federal Universiti. Mathematics & Physics. – 2018. - 11(6). - pp. 383-396.

9. Sobolev S.L. The coefficients of optimal quadrature formulas, in: Selected works of S.L.Sobolev, Springer US (2006). – pp. 561–566.
10. Шадиметов Х.М. Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева // Дис. … докт. физ.-мат. наук. –Ташкент, 2002. - 218 с.