Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences
Scientific Journal Impact Factor
Advanced Sciences Index Factor

VOLUME 2 | ISSUE 12
ISSN 2181-1784
SJIF 2022: 5.947
ASI Factor = 1.7

ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ СИММЕТРИК Т-ГИПЕРБОЛИК СИСТЕМА УЧУН АРАЛАШ МАСАЛАНИНГ ҚЎЙИЛИШИ.

Давлатов Ш.О.
Қарши муҳандислик иқтисодиёт институтининг “Олий математика” кафедраси доценти.
Холбеков Ш.О.
Қарши муҳандислик иқтисодиёт институтининг “Олий математика” кафедраси катта ўқитувчиси.

АННОТАЦИЯ

Фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган математик физика, электродинамика ва амалий математика соҳаларидаги мураккаб масалаларни сонли ечиш усулларини қуриш ва уларнинг турғунлигини тадқиқ этиш бугунги куннинг долзарб масалаларидан ҳисобланади. Ушбу мақолада гиперболик системаларга қўйилган аралаш масалаларни сонли ечиш учун тежамкор схемалар қуриш, уларнинг яқинлашишини исботлашни дастлабки қадамлари келтирилган.

Калит сўзлар: *Гиперболиксистемалар, ўзгармас коэффициентли, симметрик t-гиперболик система, аралаш масала, базис функциялар, чекли элементлар усули, аппроксимация, вектор-функцияларнинг аппроксимацияси, аралаш масаланинг* $t_n(n = 0,1,2,...)$ *қатламгача тақрибий ечими ва ҳакозолар.*

АННОТАЦИЯ

Построение численных методов решения сложных задач в области математической физики, электродинамики и прикладной математики с научным и практическим применением фундаментальных наук и исследования их устойчивости является одной из актуальных проблем современности.Представлены начальные шаги доказательства сходимости .

Ключевые слова: *гиперболические системы, постоянный коэффициент, симметричный t-гиперболическая система, смешанная задача, базисные функции, метод конечных элементов, аппроксимация, аппроксимация вектор-функций, приближенное решение смешанной задачи до слоя и др.*

ABSTRACT

The construction of numerical methods for solving complex problems in the fields of mathematical physics, electrodynamics, and applied mathematics with scientific and practical application of fundamental sciences and researching their stability is one of today's urgent issues. The initial steps of proving convergence are presented.

Keywords: *hyperbolic systems, constant coefficient, symmetric t-hyperbolic system, mixed problem, basis functions, finite element method, approximation, approximation of vector functions, approximate solution of a mixed problem up to a layer, etc.*

Ҳозирги кунда дунёда нефть-газ заҳираларини аниқлаш, иншоотларнинг зилзилабардошлилигини аниқлаш, сув иншотларини қуриш каби соҳаларга замонавий технологияларни жорий этиш, хусусан, илмий-техник имкониятлар суръатини ошириш, фан ва ишлаб чиқариш интеграциясини кенгайтириш, гиперболик системаларга қўйилган аралаш масалалар учун адекват ҳисоблаш моделларини қуришда чекли элементлар усули назариясини такомиллаштириш бўйича кўплаб илмий тадқиқотлар олиб борилмоқда. Бунда аралаш масалаларни сонли ечиш учун тежамкор методлар яратиш ва уларнинг турғунлигини исботлаш муҳим рол ўйнайди. Шу сабабли гиперболик системаларга қўйилган аралаш масалаларни сонли ечиш учун тежамкор схемалар қуриш, уларнинг яқинлашишини исботлаш ҳамда амалий масалаларга қўллаш долзарб масала ҳисобланади

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган математик физика, электродинамика ва амалий математика соҳаларидаги мураккаб масалаларни сонли ечиш усулларини қуриш ва уларнинг турғунлигини тадқиқ этишга катта эътибор қаратилмоқда.

Жаҳон тажрибаси шуни кўрсатадики, газ динамикаси, гидродинамика, электродинамика, деформацияланувчи қаттиқ жисмлар механикаси ёки туташ муҳитлар механикасининг қатор муаммоларини тадқиқ этиш гиперболик системаларга қўйилган аралаш масалалар ёрдамида тавсифланади. Бундай масалаларни сонли ечиш усуллари билан В.А.Ильин, Т.З.Исмагилов, Ю.А.Волков, В.М.Ковеня, К.Фридрих, А.М.Гришин, А.В.Гулин, А.А.Самарский, С.К.Годунов, В.М.Гордиенко, Х.О.Крайс, А.Н. Малышев, А.М.Блохин, Н.Г.Марчук, Р.Сакомота каби кўплаб жаҳон олимлар шуғулланишган. Уларнинг ишларида асосан гиперболик системаларга қўйилган аралаш масалалар айирмали схемалар ёки чекли элементлар усуллари

VOLUME 2 | ISSUE 12
ISSN 2181-1784
SJIF 2022: 5.947
ASI Factor = 1.7

ёрдамида сонли ечилган. Ушбу мақолада бир ўлчовли симметрик t-гиперболик системага қўйилган аралаш масалани сонли ечиш учун чекли элементлар усули ёрдамида ошкормас айирмали схемани қуриш масаласини айрим жиҳатлари келтирилган.

$\Omega=(\ell_1,\ell_2)$ бўлсин. $G=\{(t,x):t\in(0,T),\ x\in\Omega\}$ соҳада

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+Cu=F(t,x)\ (1)$$

симметрик t-гиперболик системани

$$\begin{aligned}R_1u(t,\ell_1)&=g_1(t),\\ R_2u(t,\ell_2)&=g_2(t)\end{aligned}\quad(2)$$

$$u(0,x)=\psi(x),\ \ x\in\Omega\ (3)$$

чегаравий ва бошланғич шартларни қаноатлантирувчи u вектор-функцияни топиш талаб қилинган бўлсин. (1)-(3) масаласи симметрик t-гиперболик система учун қўйилган аралаш масала дейилади..

Бу ерда A,B - $M\times M$ ўлчамли симметрик ҳақиқий ўзгармас матрицалар; бундан ташқари A мусбат аниқланган матрица; C - $M\times M$ ўлчамли ҳақиқий ўзгармас матрица; R_1,R_2 -мос тўғрибурчакли ўзгармас матрицалар бўлиб, уларнинг устунлар сони M га, сатрлари сони мос равишда $A^{-1}B$ матрицанинг мусбат ва манфий хос қийматлари сонига тенг; g_1,g_2- берилган вектор-функциялар бўлиб, уларнинг ўлчамлари мос равишда $A^{-1}B$ матрицанинг мусбат ва манфий хос қийматлари сонига тенг; $\psi(x)-$ берилган ўлчами M га тенг бўлган вектор-функция; $u(t,x)=(u_1,u_2,...,u_M)^T$ -ноъмалум вектор-функция; $F(t,x)=(f_1,f_2,...,f_M)^T$ -берилган вектор-функция.

(1)-(3) аралаш масаланинг чекли элементлар усули ёрдамида олинган айирмали схемаси.

$[0,T]$ кесмани N_t бўлакка бўламиз.

$$t_n=\tau\cdot n,(n=0,...,N_t),\tau=\frac{T}{N_t}.$$

$[\ell_1,\ell_2]$ кесмани N_x та тенг бўлакка бўлиб ($x_i=\ell_1+hi$, $i=0,...,N_x,\ h=\dfrac{\ell_2-\ell_1}{N_x}$), аралаш масаланинг вақт бўйича ҳар бир t_n қатламдаги,

$u_h(t_n,x)$ тақрибий ечимини $u_h^n = u_h(t_n,x) = \sum_{i=0}^{N_x} u_i^n \varphi_i(x)$ кўринишда излаймиз. Бу ерда $\varphi_i(x)$ базис функция, x_i тугунда унинг қиймати 1 га тенг, қолган тугунларда эса унинг қиймати 0 га тенг, $u_i^n = u(t_n, x_i) = (u_{1i}^n, u_{2i}^n, ..., u_{Mi}^n)^T$ вектор. (1.1) системада $\frac{\partial u}{\partial t}$ ни $\frac{u(t+\tau,x)-u(t,x)}{\tau}$ муносабат билан алмаштирамиз, $u(t,x)$ ўрнига $u_h(t_n,x)$ қўямиз ва ҳосил бўлган системанинг ҳар бир тенгламасини $\phi_0(x)$ базис функцияга кўпайтириб $[x_0, x_1]$ кесмада, $\phi_{N_x}(x)$ базис функцияга кўпайтириб $[x_{N_x-1}, x_{N_x}]$ кесмада ва $\phi_i(x)$ базис-функцияларга кўпайтириб $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, $i = 1,..., N_x - 1$ кесмаларда интеграллаймиз. Базис функциялар сифатида

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x \in (x_{i-1}, x_i); \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x \in (x_i, x_{i+1}); \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}); \end{cases} \qquad i = 1,..., N_x\text{-}1$$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h}, & x \in (x_0, x_1); \\ 0, & x \notin (x_0, x_1); \end{cases} \quad \phi_{N_x}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N_x-1}}{h}, & x \in (x_{N_x-1}, x_{N_x}); \\ 0, & x \notin (x_{N_x-1}, x_{N_x}) \end{cases} \tag{4}$$

функцияларни оладиган бўлсак, (1) система учун ушбу

$$AhL_0 u_0^{n+1} + \tau B\xi_0 u_0^{n+1} + \tau ChL_0 u_0^{n+1} = \frac{1}{2}\tau hF_0^{n+1} + AhL_0 u_0^n \tag{5}$$

$$AhL_{N_x} u_{N_x}^{n+1} + \tau B\xi_{N_x} u_{N_x}^{n+1} + \tau ChL_{N_x} u_{N_x}^{n+1} = \frac{1}{2}\tau hF_{N_x}^{n+1} + AhL_{N_x} u_{N_x}^n \tag{6}$$

$$AhLu_i^{n+1} + \tau B\xi u_i^{n+1} + \tau ChLu_i^{n+1} = \tau hF_i^{n+1} + AhLu_i^n$$
$$i = 1,...N_x - 1 \tag{7}$$

айирмали схемани оламиз. Бу ерда $u_i^n = u(t_n, x_i)$, $F_i^n = F(t_n, x_i)$, $i = 0,..., N_x$ вектор-функцияларнинг аппроксимацияси ва қуйидаги операторлар киритилган:

$$L_0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\psi^{+1}, \quad \xi_0 = \frac{\psi^{+1} - 1}{2}, L_{N_x} = \frac{1}{6}\psi^{-1} + \frac{1}{3}, \quad \xi_{N_x} = \frac{1 - \psi^{-1}}{2},$$

$$\psi^{\pm1}u_i^n = u_{i\pm1}^n,\ L = \frac{1}{6}\psi^{-1} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\psi^{+1},\ \xi = \frac{\psi^{+1} - \psi^{-1}}{2}.$$

(1)-(3) масаланинг чегаравий ва бошланғич шартларини қуйидагича аппроксимация қиламиз:

$x = \ell_1$ да $\qquad R_1 u_0(t_{n+1}) = g_1(t_{n+1})$, (8)

$x = \ell_2$ да $\qquad R_2 u_{N_x}(t_{n+1}) = g_2(t_{n+1})$, (9)

$$u_i(0) = \psi(x_i) \quad i = \overline{0, N_x}\ . \tag{10}$$

Аралаш масаланинг $t_n (n = 0,1,2,...)$ қатламгача тақрибий ечими топилган деб, t_{n+1} қатламдаги тақрибий ечимини топиш учун $u_i^{n+1},\ (i = 0,...,N_x)$ векторларнинг компоненталарига нисбатан (7)-(9) чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Чизиқли тенгламалар системаси ёпиқ бўлиши мақсадида $x = \ell_1$ да $u(t,x)$ вектор-функциянинг чегаравий шарт қўйилмаган компоненталари учун (5) айирмали тенгламалар системасидан уларга мос келувчи тенгламаларни оламиз. Масалан, $u(t,x)$ вектор-функциянинг $j-$ компонентасига чегаравий шарт қўйилмаган бўлса, (5) айирмали тенгламалар системасидан $j-$тенгламани оламиз. $x = \ell_2$ да эса $u(t,x)$ вектор-функциянинг чегаравий шарт қўйилмаган компоненталари учун (1.6) айирмали тенгламалар системасидан уларга мос келувчи тенгламаларни оламиз. Шундай қилиб ёпиқ изиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу чизиқли тенгламалар системаси бош элементлар усули билан ечилган.

REFERENCES

1. Давлатов Ш.О. Ўзгармас коэффициентли симметрик t-гиперболик системаларни икки ўлчамли соҳада текис тўрда чекли элементлар усули билан ечиш алгоритми. ҚарДУ хабарлари, №3, 2012. Б. 6-15.
2. Давлатов Ш.О. Ўзгармас коэффициентли бир ўлчовли симметрик t-гиперболик системаларни чекли элементлар усули билан нотекис тўрда ечиш //Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари, Тошкент 2021, 258-262 бетлар.
3. Ильин В.А., Моисеев Е.И. О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями.// Дифференц. уравнения, 2000, т.36. №5, с.656-661.

4. Исмагилов Т.З., Ковеня В.М., Об одном методе построения схем точной факторизации для численного решения гиперболических уравнений. //Вычислительные технологии. т.6.№3,2003. с.75-91
5. Алоев Р.Д., Давлатов Ш.О. Построение и исследование схем конечных элементов для гиперболических систем с переменными коэффициентами. Amaliy matematika va information texnologiyalarning dolzarb muammolari - Al-Xorazmiy. Бухоро 2016.
6. Алоев Р.Д., Давлатов Ш.О. Устойчивость неявной схемы конечных элементов для симметрической гиперболической системы. Амалий математика ва информацион технологияларнинг долзарб муаммолари- Ал-Хоразмий. Конференция мақолалари. Самарқанд 15-17 сентябр 2014. 72-76 бетлар.