Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences
Scientific Journal Impact Factor
Advanced Sciences Index Factor

VOLUME 2 | ISSUE 12
ISSN 2181-1784
SJIF 2022: 5.947
ASI Factor = 1.7

SONLI QATORLAR

Ergasheva Rayxona Chori qizi
Termiz davlat universiteti
Axborot texnologiyalari fakulteti talabasi
Alimova Rayhon Abdug'afforovna
Termiz davlat universiteti
Axborot texnologiyalari fakulteti talabasi

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada sonli qatorlar, Dalamber alomati, Koshi alomati haqida bayon etilgan. Teorema va ta'riflarning tasdig'i bilan keltirib o'tilgan. Bir nechta misollarning yechimi keltirilgan.

Kalit so'zlar: *Sonli qatorlar, Dalamber alomati, Koshi alomati, sonli ketma-ketliklar, yaqinlashish shartlari, uzoqlashish shartlari.*

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассматриваются числовые линии, признак Даламбера, признак Коши. Он цитируется с подтверждением теоремы и определениями. Приведено решение нескольких примеров.

Ключевые слова: *числовой ряд, признак Даламбера, признак Коши, числовые ряды, условия сходимости, условия расходимости.*

Agar sonlar $a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n + \cdots$ ko'rinishida bo'lsa, bu sonlar **sonli ketma-ketlik** deyiladi.

Agar

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad (1)$$

ko'rinishida bo'lsa bunday yig'indi **sonli qator** yoki **cheksiz sonli qator** deyiladi. Yig'indini

qisqacha yozishimiz uchun " $\sum$ "belgidan foydalamiz va (1) tenglikni

quyidagicha yozamiz: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ko'rinishiga keltiramiz.

$a_1, a_2, a_3, \dots \dots a_n$ – qatorning hadlari a_n – qatorning umumiy hadi deyiladi.

$S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots$,$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ yozib olib

S_n sonli qatorining yig'indisini topamiz.

Ta'rif: Agar $n \to \infty$ da (1) qatorning $\{S_n\}$ qismiy yig'indilar ketma – ketligi chekli limitga ega ya'ni, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ sonli qatorimiz **yaqinlashuvchi** deyiladi S son esa shu sonli qatorning qator

VOLUME 2 | ISSUE 12
ISSN 2181-1784
SJIF 2022: 5.947
ASI Factor = 1.7

yig'indisi deyiladi. Agar n→ ∞ da (1) qatorning $\{S_n\}$ qismiy yig'indilar ketma – ketligining limit cheksiz bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa, u holda (1) qator **uzoqlashuvchi** deyiladi.

Teorema: Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad (1)$$

bo'ladi. Bunda zaruriy shart bajariladi, ammo yetarli shart bo'lmaydi. $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ bo'lsa, qator **uzoqlashuvchi** bo'ladi.

1 – misol: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$ qatorni yaqinlashishga tekshiring

Yechilishi: bunda

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ foydalanamiz:

$S_n=\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$

$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ldots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}$

$S_n = 1-\frac{1}{(n+1)}$ limitga o'tamiz,

$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$, S=1 son hosil bo'ldi.

Demak, sonli qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Endi 2 – teorema bilan isbotlashni o'rganamiz.

Misol: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ yoki $\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}=e$ shartlaridan foydalanamiz:

$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n^2-3}{2n^2+1})^{n^2}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechilishi: $a_n=(\frac{2n^2-3}{2n^2+1})^{n^2} = \frac{(1-\frac{3}{2n^2})^{n^2}}{(1-\frac{1}{2n^2})^{n^2}}$ ko'rinishida yozib olamiz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{3}{2n^2})^{n^2}}{(1+\frac{1}{2n^2})^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+(\frac{-3}{2n^2}))^{\frac{-2n^2}{3}*(-\frac{3}{2})}}{(1+\frac{1}{2n^2})^{2n^2*\frac{1}{2}}}$$

Bu yerda $\lim_{n\to\infty}(1+(\frac{-3}{2n^2}))^{\frac{2n^2}{-3}} = e$ bo'ladi $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n^2})^{2n^2} = e$

U holda $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+(\frac{-3}{2n^2}))^{\frac{-2n^2}{3}*(-\frac{3}{2})}}{(1+\frac{1}{2n^2})^{2n^2*\frac{1}{2}}} = \frac{e^{\frac{-3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{4}{2}} = e^{-2} \neq 0$

Qatorning yaqinlashuvchi bo'lishining zaruriy sharti (2) bajarilmaydi. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

Teorema: Agar $n\to\infty$ da (1) qatorning (S_n) qismiy yig'indilar

Ketma – ketligining limiti cheksiz bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa, u holda (1) qator uzoqlashuvchi deyiladi.

Musbat qatorning yaqinlashuvchi bo'lishining sharti. Biror

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (3)$$

qator berilgan bo'lsin.

Agar $a_n \geq 0$ (n=1,2……) bo'lsa, (3) qator musbat hadli qator yoki qisqacha musbat qator deb ataladi .

Teorema: (3) musbat qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning qismiy yig'indilar ketma – ketligining yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarlidir.

Misol: Ushbu qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

$$\frac{\cos^2 1}{1*2} + \frac{\cos^2 2}{2*3} + \cdots + \frac{\cos^2 n}{n*(n+1)} + \cdots$$

Yechilishi: Berilgan qatorning umumiy hadi uchun quyidagi tengsizlik o'rinli

$a_k = \frac{\cos^2 k}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ chunki $\cos^2 n \leq 1$ holda

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^2 n}{k(k+1)} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$

$\{S_n\}$ qismiy yig'indilar ketma – ketligi yuqoridan 1 soni bilan chegaralangan. Demak, yuqoridagi 3-teoremaga asosan berilgan qator yaqinlashuvchi.

Koshi alomati: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$

Qator barcha $n \geq 1$ uchun $\sqrt[n]{a^n} \leq q < 1$ bo'lsa (1) qatori yaqinlashuvchi bo'ladi.

$\sqrt[n]{a^n} \geq 1$ bo'lsa (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isboti: Aytaylik (1) qator hadlari uchun $\sqrt[n]{a^n} \leq q < 1$ bo'lib, bu tenglamadan $\sqrt[n]{a_n} \leq q,\ a_n \leq q^n$ bo'lishi kelib chiqadi .

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ bunday sonli qatorlar **garmonik qator** deyiladi va garmonik qator uzoqlashuvchidir. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ bo'lib,

1) $\alpha > 1$ bo'lsa umumlashgan garmonik qator uzoqlashuvchi bo'ladi;
2) $\alpha \geq 1$ bo'lsa garmonik qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bundan $a_n \leq q^n$, $q < 1$ va $n > 1$ da yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi va $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, $a_n \geq 1$ bo'ladi. $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$ qator mos hadidan kichik. Ko'pincha, Koshi alomatining quyidagi keltirilgan limit ko'rinishidagi tasdig'idan foydalaniladi.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$ mavjud bo'lsin, u holda,

1) $k < 1$ bo'lganda sonli qatorimiz yaqinlashuvchi;
2) $k > 1$ bo'lsa sonli qatorimiz uzoqlashuvchi bo'ladi.

Agar $k = 1$ hol mavjud bo'lsa, Koshi alomati bilan uni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi deya olmaymiz.

Misol: $\sum_{n=1}^{\infty} n^6 (\frac{4n+5}{5n+6})^n$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Bu yerda, $a_n = n^6 (\frac{4n+5}{5n+6})^n$, $\sqrt[n]{a_n} = n^{\frac{6}{n}} * \frac{4n+5}{5n+6}$ limitga o'tsak,

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{6}{n}} * \frac{4n+5}{5n+6} = \frac{4}{5}$ hosil bo'ladi. Bunda $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{6}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}^{\,6} = 1$ bo'ladi va $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+5}{5n+6}$ dan surat va mahrajni n ga bo'lib yuboramiz.

$\lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{5}{n}}{5+\frac{6}{n}}$ dan $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{6}{n}} * \frac{4n+5}{5n+6} = \frac{4}{5} < 1$ kelib chiqadi va Koshi alomatiga ko'ra qator yaqinlashuvchi.

Dalamber alomati: Agar musbat hadli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

qatorda barcha $n \geq 1$ uchun $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ $(a_n > 0,\ n = 1,2,3 \ldots)$ bo'lsa, (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ $(a_n > 0, n = 1,2,3, \ldots.)$ bo'lsa (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi. Agar limitga o'tsak (1) qator uchun $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$ limit mavjud bo'lsin. U holda:

1) $d < 1$ bo'lganda (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi;
2) $d > 1$ bo'lganda (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Misol: Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin:

$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ $\lim_{n\to 0} (1+n)^{\frac{1}{n}} = e$; foydalanamiz va Dalamber alomatidan yaqinlashishga tekshiramiz:

$$a_n = \frac{n!}{n^n},\ a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} * \frac{n^n}{n!} = \frac{n!*(n+1)*n^n}{(n+1)^{(n+1)}*n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = (\frac{n}{n+1})^n$ bu holatda n darajaga bo'lamiz va natija $(\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$ va bundan limitga o'tsak, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$.

Demak, $(e \approx 2{,}71 \ldots)$ ga ko'ra d= $\frac{1}{e}$<1 berilgan qator yaqinlashuvchi.

Eslatma: $d = 1$ bo'lganda Dalamber alomati javob bermaydi.

Yani d=1 bo'lsa (1) qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin.

Misol: $a_n = \frac{n^{12}}{(n+12)!}$ bu misolda bittalik faktarial bo'lganligidan Dalamberda ishlaymiz.

$a_n = \frac{n^{12}}{(n+12)!}$ $\quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{12}}{((n+1)+2)!}$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{12}}{(n+3)*(n+2)!} * \frac{(n+2)!}{n^{12}}$ limitga keltirsak,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{12}}{(n+3)*(n+2)!}*\frac{(n+2)!}{n^{12}}\right)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{12}*\frac{1}{(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right)^{12}*\frac{1}{(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right)^{12}*\frac{1}{n+3}=1*0=0<1$$

Demak, sonli qator yaqinlashuvchi.

Misol: $a_n=\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$ darajada n qatnashgani uchun bu sonli qatorni Koshi alomatida yechiladi.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n^2+6)}\right)^{\frac{-(n^2+6)}{-(n^2+6)}*n^2}=\frac{1}{e}<$$
1 demak, sonli qator yaqinlashuvchi.

Xulosa qiladigan bo'lsam, bu maqolamda sonli qatorlar va ularning yaqinlashishi, uzoqlashishi haqida yozilgan, yig'indi haqida ma'lumotlar keltirilgan. Koshi va Dalamber alomatlari yoritib berilgan va ularga bir nechta misollar va ajoyib limitlar keltirilgan.

REFERENCES

1. G. Xudayberganov, A. K. Vorisov, X. T. Mansurov, B. A. Shoimqulov "Matematik Analizdan ma'ruzalar" 1- qism "Voris – nashriyot" Toshkent – 2010.
2. G. Xudayberganov, A. K. Vorisov, X. T. Mansurov, B. A. Shoimqulov "Matematik Analizdan ma'ruzalar" 2 - qism "Voris – nashriyot" Toshkent – 2010.
3. A. Gaziyev, I. Israilov, M. Yaxshiboyev "Matematik Analizdan misol va masalalar" Toshkent "Yangi asr avlodi" 2006.
4. A. Gaziyev, I. Israilov, M. Yaxshiboyev "Funksiyalar va Grafiklar" "Voris – nashriyot" Toshkent – 2016.